

**UNIVERSIDAD CARLOS III DE MADRID**

**GRADO EN INGENIERÍA MECÁNICA**



DEPARTAMENTO DE MECÁNICA DE MEDIOS  
CONTINUOS Y TEORÍA DE ESTRUCTURAS

---

**MODELIZACIÓN NUMÉRICA 3D DE LA  
INICIALIZACIÓN DE FISURAS EN  
PROBETAS DE MATERIAL CUASIFRÁGIL**

AUTOR: Mario Medialdea Dulce

DIRECTOR: José Antonio Loya Lorenzo

Leganés, 30 de Septiembre de 2014



# Índice general

<b>1. Introducción.....</b>	<b>1</b>
1.1. Motivación .....	2
1.2. Objetivo .....	3
 <b>2. Introducción a la mecánica de fractura .....</b>	<b>4</b>
2.1. Introducción teórica.....	5
2.1.1. Modos de deformación .....	5
2.1.2. Campo tensional del sólido fisurado.....	6
2.1.3. Factor de intensidad de tensiones (FIT). .....	7
2.1.4. Relación entre el Factor de Intensidad de Tensiones y el comportamiento global del sólido. ....	10
2.1.5. Relación entre el Factor de Intensidad de Tensiones y la Tasa de liberación de Energía.....	11
2.1.6. Zona plástica en el borde de la fisura.....	13
2.1.7. Tensión Plana y Deformación Plana.....	16
2.1.8. Factor de intensidad de tensiones como criterio de fractura. ....	18
2.2. Métodos de obtención del Factor de Intensidad de Tensiones. ....	21
2.2.1. Integral J.....	21
2.3. Métodos numéricos para la determinación de la Integral J.....	24
2.3.1. Método de los elementos finitos.....	24
 <b>3. Análisis numérico .....</b>	<b>27</b>
3.1. ABAQUS.....	28
3.2. Descripción del modelo. ....	29
3.3. Análisis Bidimensional.....	31
3.3.1. Geometría del problema.....	31
3.3.2. Condiciones de contorno.....	32
3.3.3. Modelización de la fisura .....	35

3.3.4. Mallado del modelo. ....	36
3.3.5. Comparación de resultados. ....	40
3.4. Análisis tridimensional. ....	42
3.4.1. Descripción del modelo. ....	42
3.4.2. Mallado del modelo. ....	43
3.4.3. Influencia del espesor. ....	45
3.4.4. Discusión de resultados. ....	50
3.4.5. Criterio de fractura. ....	51
<b>4. Conclusiones. ....</b>	<b>52</b>
4.1. Resumen y conclusiones. ....	53
4.2. Trabajos futuros. ....	54

# Índice de figuras

Figura 2.1: Los tres modos de deformación de una pieza fisurada. ....	5
Figura 2.2: Definición del sistema de coordenadas en el borde de la fisura. ....	6
Figura 2.3: Tensión normal al plano de fisura para Modo I de deformación. ....	9
Figura 2.4: Fisura de espesor despreciable en una placa infinita sometida a una tensión remota de tracción. ....	12
Figura 2.5: Corrección de la Zona Plástica de Irwin. ....	13
Figura 2.6: Forma de la zona plástica en el extremo de la fisura. ....	15
Figura 2.7: Deformación tridimensional en el extremo de fisura. ....	16
Figura 2.8: Variación esquemática de la tensión a lo largo del espesor en un punto cercano al extremo de fisura. ....	17
Figura 2.9: Forma y tamaño de la zona plástica en función de $K_I$ y del espesor. ....	18
Figura 2.10: Influencia del espesor en el factor de intensidad de tensiones crítico para Modo I de deformación. ....	19
Figura 2.11: Comparación esquemática de la curva tensión-deformación para materiales elasto-plásticos y materiales elásticos no lineales. ....	21
Figura 2.12: Contorno arbitrario alrededor del borde de fisura. ....	23
Figura 2.13: Coordenadas globales y locales para un elemento bidimensional. ....	25
Figura 3.1: Dimensiones de la probeta en mm. ....	29
Figura 3.2: Modelo empleado en el caso de estudio. ....	31
Figura 3.3: Carga aplicada al modelo. ....	32
Figura 3.4: Condición de simetría en dirección Y para el modelo bidimensional. ....	33
Figura 3.5: Condición de simetría en dirección Z para el modelo bidimensional. ....	34
Figura 3.6: Dirección de propagación de la fisura. ....	35
Figura 3.7: mallado de 304 elementos y 356 nodos. ....	36
Figura 3.8: mallado de 758 elementos y 829 nodos. ....	36
Figura 3.9: mallado de 2360 elementos y 2466 nodos. ....	37
Figura 3.10: mallado de 4148 elementos y 4294 nodos. ....	37
Figura 3.11: mallado de 12529 elementos y 12783 nodos. ....	37
Figura 3.12: Integral-J en función del número de elementos para mallados lineales y cuadráticos. ....	38
Figura 3.13: Mallado adaptativo de 1746 elementos. ....	39
Figura 3.14: Gráfica del factor geométrico de Newman para el caso de estudio. ....	40
Figura 3.15: Condición de simetría en dirección Z para el modelo tridimensional. ....	42
Figura 3.16: Mallado del modelo tridimensional en el plano XY. ....	43
Figura 3.17: Mallado del espesor para las probetas de 2, 4, 8, 16 y 50 mm. ....	44
Figura 3.18: Valor máximo de la Integral-J adimensionalizado para diferentes espesores. ....	46
Figura 3.19: Distribución de J a lo largo del frente de fisura desde el plano medio hasta la superficie libre para el modelo de espesor 2 mm. ....	47
Figura 3.20: Distribución de J a lo largo del frente de fisura desde el plano medio hasta la superficie libre para distintos espesores. ....	48
Figura 3.21: Variación de la tensión en dirección Z en los distintos espesores. ....	49
Figura 3.22: Carga que soporta el modelo en función del espesor. ....	51

# **Capítulo 1**

## **Introducción**

## **1.1. Motivación**

El crecimiento de la industria a mediados del siglo XX hizo que la Mecánica de Fractura se convirtiera en una ciencia de importante estudio. En la actualidad, esta ciencia tiene un gran campo de aplicación en la industria y en todo tipo de aplicaciones ingenieriles. Es importante comprender el comportamiento de materiales fisurados, ya que los defectos aparecen en cualquier elemento estructural, ya sea durante la vida en servicio o durante el proceso de fabricación.

Una de las industrias que ha impulsado más el desarrollo de técnicas de diseño y de análisis de materiales mediante la Mecánica de Fractura es la aeronáutica. La importancia de la seguridad y los elevados costes de mantenimiento de los componentes son un hándicap a la hora del diseño. Por eso un análisis de fractura preciso puede incrementar los tiempos de inspección sin reducir la seguridad, y permite además utilizar piezas de menor tamaño o sección, lo que supone un ahorro económico importante.

Los materiales frágiles son los que necesitan un estudio más exhaustivo de fractura, ya que no sufren deformación previa al fallo y es más difícil prever cuando comenzará la propagación de la fisura. En este proyecto se ha elegido un polímero comercial como es el PMMA que presenta un comportamiento que se puede considerar elástico lineal hasta la fractura, incluso a velocidades de deformación bajas.

## 1.2. Objetivo

La resistencia a la fractura de un material está caracterizada por el *Factor de Intensidad de Tensiones*,  $K_I$ . Este parámetro gobierna el campo de tensiones cerca del extremo de la fisura, y depende de la geometría, las cargas aplicadas y la longitud de la fisura. Un criterio de fractura establece que, al alcanzar  $K_I$  un valor crítico, la fisura comienza a propagarse. Bajo ciertas condiciones este valor crítico puede considerarse una propiedad del material denominada *Tenacidad de Fractura*,  $K_{IC}$ .

Existen varios métodos para calcular el Factor de Intensidad de Tensiones. Uno de ellos es el cálculo de la *Tasa de Liberación de Energía*,  $G$ , mediante la Integral-J, cuyo valor para materiales elástico coincide con el de  $G$ .

El objetivo de este proyecto es analizar el comportamiento a fractura de materiales quasifrágiles fisurados en modelos tanto bidimensionales, como tridimensionales. Se calcularán los valores de la Integral-J para probetas de distintos espesores utilizando el programa de elementos finitos ABAQUS, y se utilizará como criterio de fractura el valor crítico de J. Con el fin de analizar la fiabilidad de los resultados, se han comparado los resultados de las simplificaciones bidimensionales con fuentes bibliográficas.



## **Capítulo 2**

### **Introducción a la mecánica de fractura**

## 2.1. Introducción teórica

### 2.1.1. Modos de deformación

Al estudiar una fisura debemos conocer las cargas a las que va a estar sometida la pieza con el fin de modelizar su comportamiento. Las fisuras en un sólido constan de dos caras separadas, una superior y otra inferior. La línea de unión que forman estas dos superficies se denomina frente de fisura. Cuando el cuerpo fisurado está sujeto a cargas externas, las superficies de fisura pueden desplazarse una con respecto de la otra a lo largo de las tres direcciones posibles,  $U_x$ ,  $U_y$  y  $U_z$ , donde  $(x,y,z)$  es un sistema de coordenadas cartesiano centrado en el frente de fisura y con el eje  $x$  perpendicular al frente de fisura, el eje  $y$  perpendicular al plano de fisura y el eje  $z$  a lo largo del frente de fisura.

Existen tres modos de deformación de una pieza fisurada. El Modo I o Modo de Apertura es aquel que se produce bajo la aplicación de una carga de tracción normal al plano de fisura. Es el más común y el más estudiado por ser además el más peligroso. El Modo II o Modo de Desplazamiento es aquel que aparece cuando se somete a una carga de tal forma que una de las caras de la fisura se desliza sobre la otra en el plano de la fisura. Por último, el Modo III o Modo de Rasgadura, aparece al aplicar una carga cortante que hace que ambas caras de la fisura se deslicen una sobre la otra fuera del plano de la fisura. Los tres modos de deformación se muestran en la siguiente figura esquematizados.

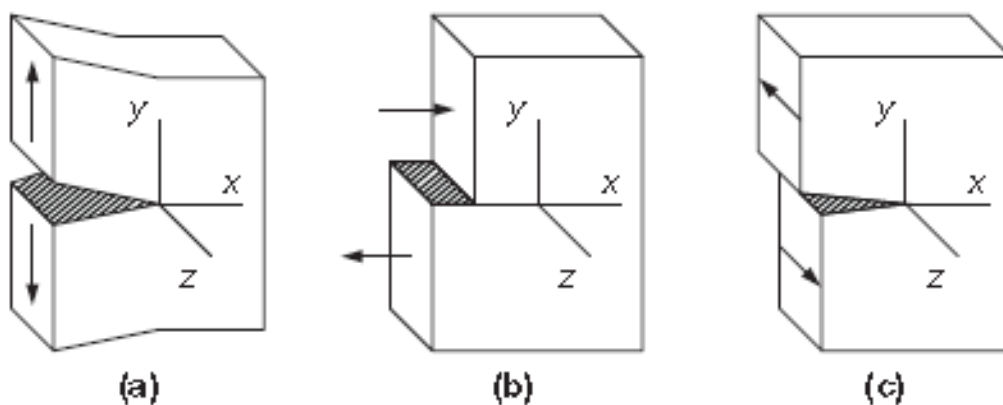


Figura 2.1: Los tres modos de deformación de una pieza fisurada.

### 2.1.2. Campo tensional del sólido fisurado.

Para un cierto sólido fisurado sujeto a cargas externas en condiciones de equilibrio, es posible derivar una expresión para obtener el valor de la tensión en cualquier punto del sólido asumiendo que el material se comporta de una manera isotrópica, lineal y elástica. La expresión general para calcular el campo tensional es la siguiente. (Ref.[1])

$$\sigma_{ij} = \left(\frac{k}{\sqrt{r}}\right) f_{ij}(\theta) + \sum_{m=0}^{\infty} A_m r^{\frac{m}{2}} g_{ij}^{(m)}(\theta) \quad (2.1)$$

Donde  $\sigma_{ij}$  son las componentes del tensor de tensiones,  $r$  y  $\theta$  son la distancia y al ángulo desde el extremo de la fisura hasta el punto evaluado, tal y como se muestra en la Fig.2.2,  $k$  es una constante y  $f_{ij}$  es una función adimensional que depende únicamente de  $\theta$ .

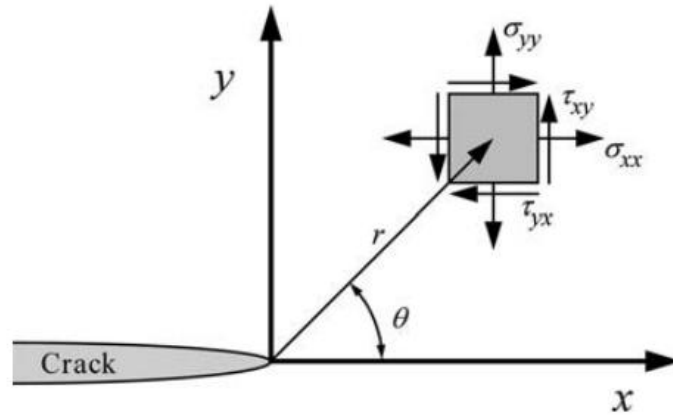


Figura 2.2: Definición del sistema de coordenadas en el borde de la fisura.

El primer término de la expresión es el que gobierna el valor del campo tensional en puntos cercanos a la fisura, ya que cuando  $r \rightarrow 0$  el valor crece infinitamente mientras que los demás términos tienden a 0. Observamos en la ecuación que cuando  $r = 0$  el valor de la tensión es asintótico.

Otro dato a tener en cuenta es que el valor de la constante de proporcionalidad  $k$  es diferente para cada uno de los tres modos de deformación. Como estamos trabajando con comportamientos lineales, en el caso en que hubiera varios modos de deformación simultáneos, podríamos aplicar superposición de estados siendo el campo tensional la suma del correspondiente a cada uno de los modos.

$$\sigma_{ij}^{(total)} = \sigma_{ij}^{(I)} + \sigma_{ij}^{(II)} + \sigma_{ij}^{(III)} \quad (2.2)$$

### 2.1.3. Factor de intensidad de tensiones (FIT).

Como ya sabemos, en las proximidades del extremo de la fisura el segundo término de la expresión general tiende a cero, por lo que podemos prescindir de él y quedarnos solo con el primer término. La constante  $k$  y la función  $f_{ij}$  dependen del modo de deformación. Es conveniente en este punto sustituir  $k$  por el llamado *Factor de Intensidad de Tensiones*,  $K$ . La expresión para relacionar la constante de proporcionalidad con el factor de intensidad de tensiones para el modo de deformación I es la siguiente (Ref.[1]):

$$K_I = k\sqrt{2\pi} \quad (2.3)$$

De esta manera, podemos expresar las tensiones en las proximidades del extremo de fisura de la siguiente manera:

$$\sigma_{ij} = \left( \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \right) f_{ij}^I(\theta) \quad (2.4)$$

Las componentes del tensor de tensiones y del campo de desplazamientos en las proximidades del extremo de la fisura vienen detalladas en las tablas 2.1 y 2.2 respectivamente.

**Tabla 2.1:** Tensiones en las proximidades del extremo de una fisura para Modo I y Modo II en un material is otro, elástico y lineal. (Ref. [1])

	Modo I	Modo II
$\sigma_{xx}$	$\frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[1 - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right]$	$-\frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[2 + \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right]$
$\sigma_{yy}$	$\frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[1 + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right]$	$\frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right)$
$\tau_{xy}$	$\frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right)$	$\frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[1 - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right]$
$\sigma_{zz}$	0 (tensión plana) $\nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})$ (deformación plana)	0 (tensión plana) $\nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})$ (deformación plana)
$\tau_{xz},$ $\tau_{yz}$	0	0

Siendo  $\nu$  el Coeficiente de Poisson.

**Tabla 2.2:** Desplazamientos en las proximidades del extremo de una fisura para Modo I y Modo II en un material is otro, elástico y lineal. (Ref. [1])

	Modo I	Modo II
$u_x$	$\frac{K_I}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[\kappa - 1 + 2 \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]$	$\frac{K_{II}}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[\kappa + 1 + 2 \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]$
$u_y$	$\frac{K_I}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[\kappa + 1 - 2 \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]$	$-\frac{K_{II}}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[\kappa - 1 - 2 \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]$

Siendo  $\mu$  el módulo de elasticidad transversal.

$$\kappa = (3 - \nu)/(1 + \nu) \text{ (tensión plana)}$$

$$\kappa = 3 - 4\nu \text{ (deformación plana)}$$

De acuerdo con la tabla 2.1 si consideramos  $\theta = 0$ , es decir, el plano de fisura, obtenemos que el valor de la tensión en direcciones X e Y es el mismo y además la

tensión tangencial es nula, por lo que podemos concluir que el plano de fisura es un plano principal.

Las tablas solo nos dan las expresiones de la tensión en las proximidades del extremo de la fisura. Si nos alejásemos, las tensiones se verían afectadas por la geometría y por las condiciones de contorno del sólido.

Llamamos *Zona Dominada por la Singularidad* a la pequeña región en la que son válidas las expresiones de la tabla 2.1. El Factor de Intensidad de Tensiones define la amplitud de la zona de singularidad. Conociendo  $K$  podemos resolver todas las componentes de la tensión, deformación y desplazamientos en cualquier punto próximo al extremo de la fisura. Por esto, en mecánica de fractura es importante conocer este parámetro. En la siguiente figura se representa la tensión normal al plano de fisura con respecto a la distancia al extremo de fisura.

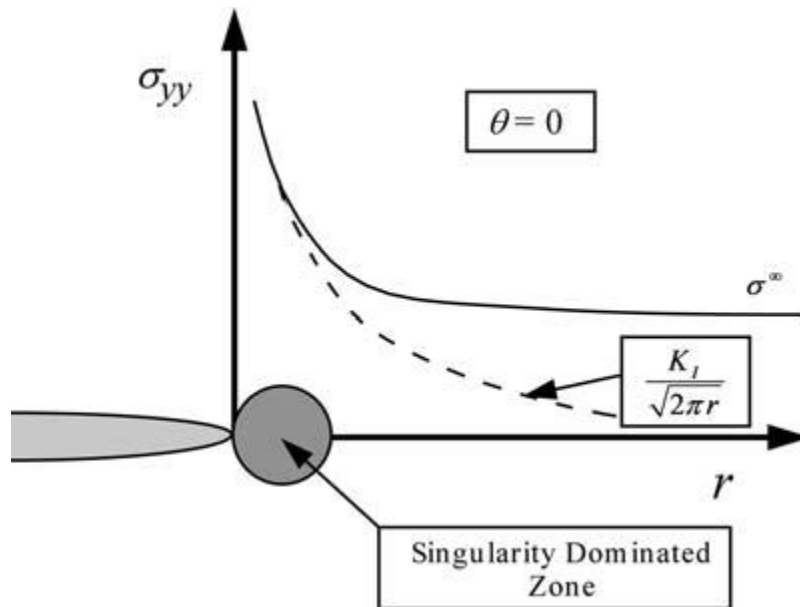


Figura 2.3: Tensión normal al plano de fisura para Modo I de deformación.

#### 2.1.4. Relación entre el Factor de Intensidad de Tensiones y el comportamiento global del sólido.

Para que el FIT pueda ser de utilidad, tenemos que ser capaces de determinarlo para unas condiciones de carga y una geometría determinadas. Se ha logrado obtener expresiones cerradas para un cierto número de configuraciones. Una de las soluciones más simples consiste en una placa infinita que contiene una fisura pasante. La placa está sometida a una tensión de tracción uniforme,  $\sigma$ , perpendicular al plano de la fisura. Para un material isótropo, elástico y lineal, las componentes de la tensión crecen proporcionalmente a la carga remota aplicada, por lo tanto las tensiones en el extremo de la fisura serán proporcionales a la carga aplicada y el FIT también lo será ( $K_I \propto \sigma$ ). La solución para esta configuración viene dada por la siguiente expresión. (Ref.[2]).

$$K = \sigma\sqrt{\pi a} \quad (2.5)$$

Dependiendo de la geometría y de las cargas aplicadas obtendremos distintas expresiones para las distintas configuraciones. Como regla general se parte de la expresión anterior añadiéndole un coeficiente adimensional que depende de la geometría y del modo de carga aplicado denominado *Factor de Forma*,  $\beta$ .

$$K = \beta\sigma\sqrt{\pi a} \quad (2.6)$$

Estas expresiones valen únicamente cuando se trata de un modo de deformación o de una carga aplicada determinada. Para un material elástico lineal, las componentes individuales de las tensiones, deformaciones y desplazamientos pueden ser sumadas. Por ejemplo, dos tensiones normales en la dirección x impuestas por diferentes fuerzas externas pueden superponerse para obtener la tensión total en x, pero un esfuerzo normal no puede ser sumado a un esfuerzo tangencial. Del mismo modo, para calcular el FIT total podemos aplicar superposición siempre y cuando nos encontremos en el mismo modo de deformación, sino debemos utilizar otros métodos más complejos para calcular el FIT total.

$$K_I^{(total)} = K_I^{(A)} + K_I^{(B)} + K_I^{(C)} + \dots \quad (2.7)$$

$$K_{(total)} \neq K_I + K_{II} + K_{III} + \dots \quad (2.8)$$

### 2.1.5. Relación entre el Factor de Intensidad de Tensiones y la Tasa de liberación de Energía.

Como hemos dicho antes, el FIT gobierna las condiciones de tensión y deformación en el extremo de la fisura. Cuando un material falla localmente lo hace bajo una combinación dada de tensiones y deformaciones, por lo que habrá un valor máximo de la tensión que soportará el material. Como el valor de la tensión en el extremo de la fisura y el FIT son proporcionales podemos decir que habrá un valor crítico de  $K$  para el que el material fallará. Así pues, podemos utilizar el siguiente criterio de fractura:

$$K \leq K_{crítico} \quad (2.9)$$

Este valor crítico, bajo determinadas condiciones, es una constante del material denominada *Tenacidad de Fractura*  $K_C$ .

Otro factor a tener en cuenta a la hora de establecer un criterio de fractura es el intercambio neto de energía potencial que acompaña al crecimiento de la fisura. El parámetro que cuantifica este intercambio de energía se denomina *Tasa de Liberación de Energía*,  $G$ . En el momento de la fractura,  $G=G_C$ , donde  $G_C$  es la tasa de liberación de energía crítica que es una medida de la resistencia a la fractura. Para una fisura de longitud  $2a$  en una placa infinita sometida a una tensión de tracción remota, la tasa de liberación de energía viene dada por la siguiente expresión:

$$G = \frac{\pi \sigma^2 a}{E} \quad (2.10)$$

Donde  $E$  es el Módulo de Young,  $\sigma$  es la carga remota aplicada, y  $a$  es la mitad de la longitud de la fisura.



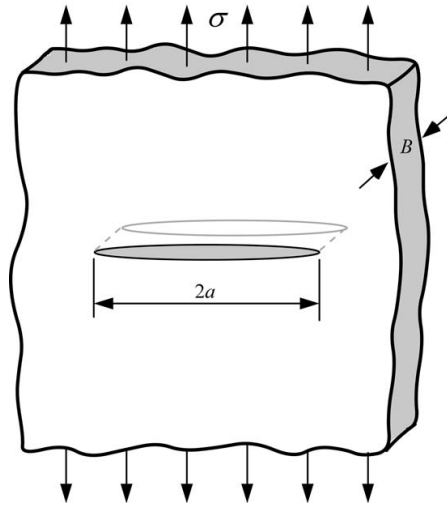


Figura 2.4: Fisura de espesor despreciable en una placa infinita sometida a una tensión remota de tracción.

Podemos relacionar la tasa de liberación de energía con el FIT ya que ambas dependen directamente de la tensión aplicada. La relación viene dada por la siguiente expresión, (Ref.[1]):

$$G = \frac{K_I^2}{E'} \quad (2.11)$$

Donde:

$$E' = E \quad \text{en tensión plana}$$

$$E' = \frac{E}{1 - \nu^2} \quad \text{en deformación plana}$$

### 2.1.6. Zona plástica en el borde de la fisura.

El análisis tensional de un sólido elástico lineal predice tensiones infinitas en el extremo de la fisura. En los materiales reales esto no llega a ocurrir porque, al alcanzar la tensión un valor determinado, el material plastifica apareciendo deformaciones inelásticas, lo que hace que las tensiones disminuyan en la zona. Esto se debe a que el extremo de la fisura no es perfectamente afilado, sino que existe un radio de curvatura finito, por lo que la singularidad en el extremo deja de existir. La región donde se producen las deformaciones inelásticas se denomina *Zona Plástica*. Este término se aplica normalmente a metales, pero puede ser utilizado para describir el comportamiento inelástico en el extremo de la fisura para cualquier material. En la siguiente figura se representa la corrección de Irwin para hallar la zona plástica.(Ref.[1]).

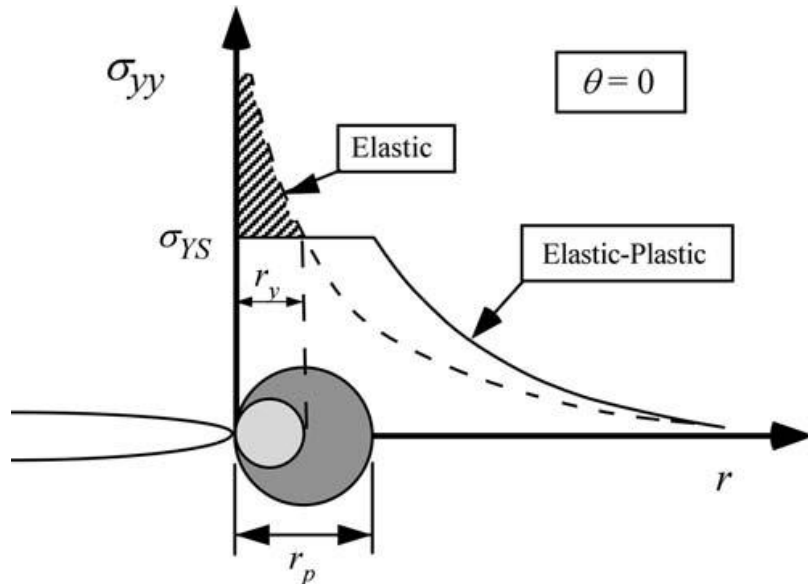


Figura 2.5: Corrección de la Zona Plástica de Irwin.

Donde:

$\sigma_{YS}$  es el Límite Elástico Uniaxial.

$$r_p = \frac{1}{\pi} \left( \frac{K_I}{\sigma_{YS}} \right)^2 \quad (2.12)$$

$$r_y = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{K_I}{\sigma_{YS}} \right)^2 \quad \text{tensión plana}$$

$$r_y = \frac{1}{6\pi} \left( \frac{K_I}{\sigma_{YS}} \right)^2 \quad \text{deformación plana}$$

Otro método para determinar el tamaño de la zona plástica en el extremo de la fisura es la *Aproximación de Dugdale y Barenblatt* (Ver Ref.[1]). Ambas aproximaciones proporcionan sencillas correcciones para aplicar la mecánica de fractura elástica lineal (MFEL) cuando el tamaño de la zona plástica es pequeño en relación al espesor de la pieza.

Para estimar la forma de la zona plástica se puede utilizar el Criterio de plastificación de Von Mises:

$$\sigma_e = \frac{1}{\sqrt{2}} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2]^{\frac{1}{2}} \quad (2.13)$$

Donde  $\sigma_e$  es la Tensión Efectiva; y  $\sigma_{1,2,3}$  las Tensiones Principales Normales. Para calcular las tensiones principales utilizamos las relaciones que nos proporciona el Círculo de Mohr:

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} \pm \left[ \left( \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (2.14)$$

Para tensión plana,  $\sigma_3 = 0$ , y para deformación plana,  $\sigma_3 = \nu(\sigma_1 + \sigma_2)$ . Sustituyendo las expresiones para Modo I de deformación en la expresión anterior y despejando el radio de la zona plástica como función de  $\theta$  obtenemos las siguientes ecuaciones:

Tensión Plana:

$$r_y(\theta) = \frac{1}{4\pi} \left( \frac{K_I}{\sigma_{YS}} \right)^2 \left[ 1 + \cos \theta + \frac{3}{2} \sin^2 \theta \right] \quad (2.15)$$

Deformación Plana:

$$r_y(\theta) = \frac{1}{4\pi} \left( \frac{K_I}{\sigma_{YS}} \right)^2 \left[ (1 - 2\nu)^2 (1 + \cos \theta) + \frac{3}{2} \sin^2 \theta \right] \quad (2.16)$$

La Figura 2.6 define el contorno aproximado entre el comportamiento elástico y plástico del material.(Ref.[1]).

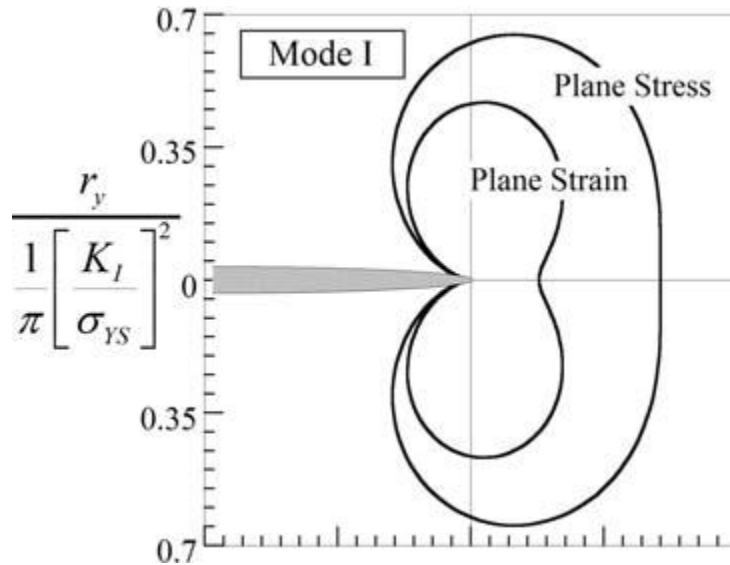


Figura 2.6: Forma de la zona plástica en el extremo de la fisura.

Observamos la diferencia de forma y tamaño para un mismo valor de  $K_I$  en los casos de tensión plana y deformación plana. Esta gráfica es una aproximación de primer orden basada en un análisis puramente elástico, es decir, no se ha considerado la redistribución de tensiones en el extremo de la fisura debido a la formación de la zona plástica.

### 2.1.7. Tensión Plana y Deformación Plana.

En la mayoría de los problemas de mecánica de la fractura se puede reducir la solución a un estado de tensiones bidimensional, es decir, al menos una de las tensiones o deformaciones principales se considera igual a cero, tensión plana y deformación plana. Generalmente, en las proximidades al extremo de la fisura no existe tal estado bidimensional, sino que existe un estado de tensiones tridimensional. Esto se debe a que existe una fisura que eleva la tensión normal al plano de la fisura y hace que el material en el borde de la grieta intente contraerse en dirección “z”, sin embargo, el material en contacto trata de impedirselo generando una tensión en esa dirección. Si no existiera tal fisura, la placa estaría sometida a un estado de tensión plana,  $\sigma_{zz} = 0$ .

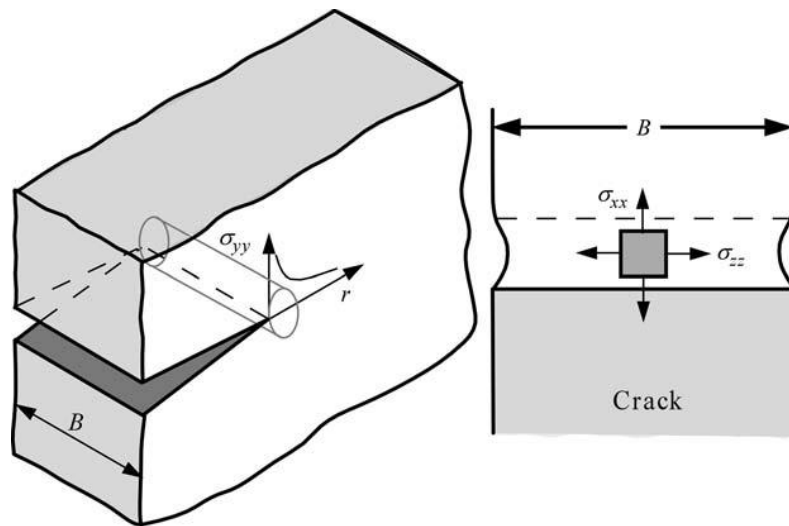


Figura 2.7: Deformación tridimensional en el extremo de fisura. (Ref.[1])

En la Figura 2.8 (Ref.[1]) se muestra la variación a lo largo del espesor de la pieza de la tensión en dirección “z” asumiendo que la zona plástica es pequeña, es decir,  $r \ll B$ .

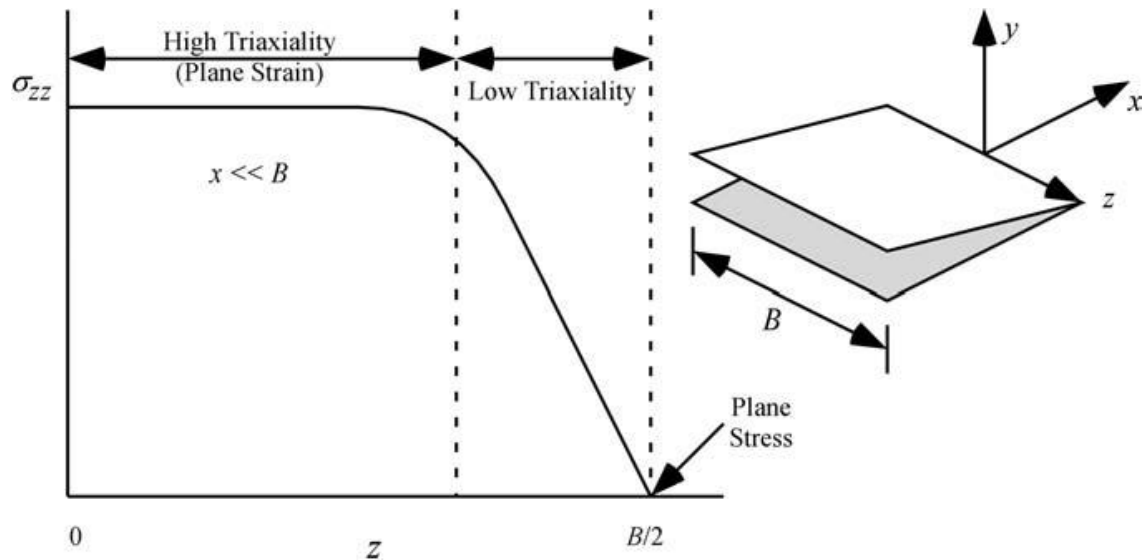


Figura 2.8: Variación esquemática de la tensión a lo largo del espesor en un punto cercano al extremo de fisura.

Como podemos observar, en la superficie de la placa se dan condiciones de tensión plana ya que no hay tensión normal aplicada en la superficie libre. En este punto,  $\varepsilon_{zz}$  alcanza su valor máximo absoluto. En el plano medio de la placa ( $z=0$ ), existen condiciones de deformación plana ( $\varepsilon_{zz} = 0$ ) y  $\sigma_{zz} = \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})$  suponiendo un comportamiento elástico lineal. Existe una región próxima a la superficie libre de la placa en la que no existe un estado de tensión plana ni de deformación plana.

El estado tensional en el contorno elasto-plástico depende del tamaño de la zona plástica en comparación con el espesor de la placa. Existen condiciones de deformación plana si la zona plástica es muy pequeña comparada con el espesor, sin embargo, predomina el estado de tensión plana si la zona plástica es del mismo orden que el espesor. La Figura 2.9 muestra la forma y el tamaño de la zona plástica en el plano medio de la placa en función de  $K_I$  y del espesor.

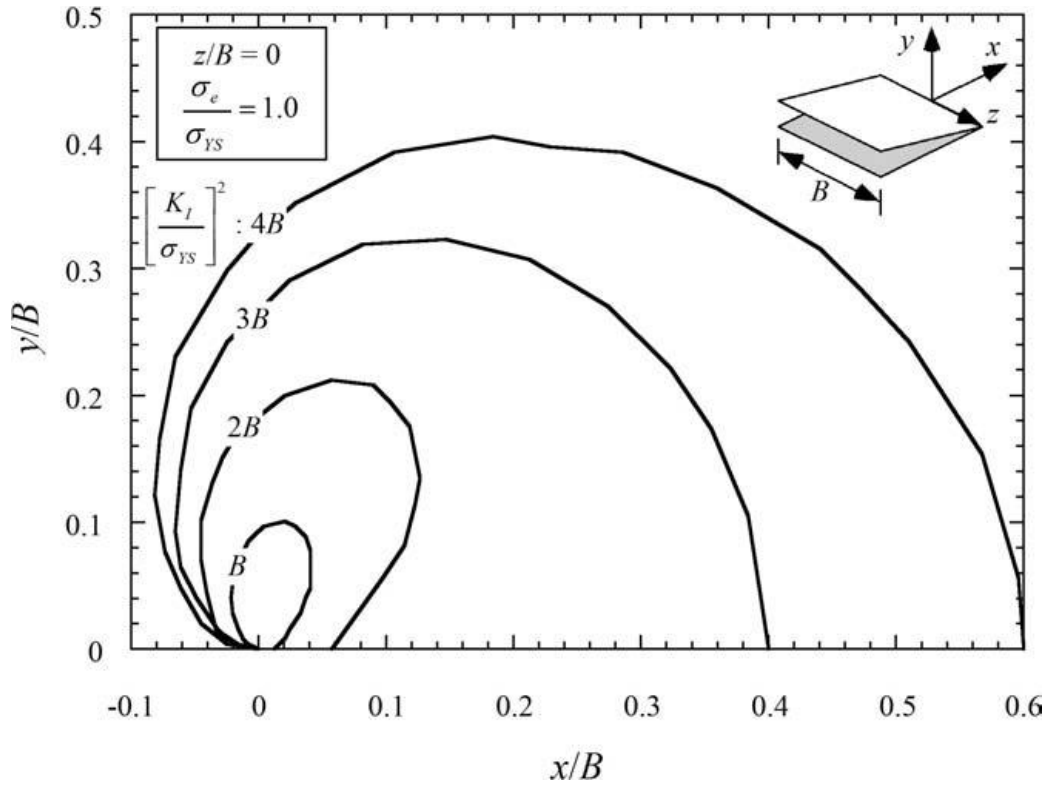


Figura 2.9: Forma y tamaño de la zona plástica en función de  $K_I$  y del espesor.

### 2.1.8. Factor de intensidad de tensiones como criterio de fractura.

Como hemos visto en capítulos anteriores, cuando el FIT alcanza un valor crítico determinado, el material falla y se propaga la fisura. Este valor crítico puede ser una constante del material bajo determinadas condiciones denominada *Tenacidad de Fractura*,  $K_C$ . Esta constante es independiente del tamaño y de la geometría del cuerpo fisurado. Cuando no se dan esas condiciones, el FIT crítico depende de varios factores que analizaremos a continuación.

#### 2.1.8.1. Influencia del Modo de Deformación.

Aunque el FIT crítico para un modo de deformación dado es una constante del material,  $K_C$  generalmente varía con el modo de carga aplicado.

$$K_{IC} \neq K_{IIC} \neq K_{IIIC}$$

La mayoría de los materiales son más susceptibles a la fractura bajo tensión normal que a la fractura bajo tensión tangencial. Por eso el factor de intensidad de tensiones de mayor importancia es el debido al Modo I de deformación, ya que generalmente el valor del FIT crítico para los Modos de deformación II y III es mayor que para el Modo I. Por este motivo, la mayoría de las aplicaciones prácticas de mecanismos de fractura consideran solamente la componente de carga correspondiente al Modo I.

#### 2.1.8.2. Influencia de las dimensiones de la probeta.

Otro factor a tener en cuenta son las dimensiones de la probeta. Las dimensiones en el plano de la fisura (plano XY) y el espesor influyen en el tamaño de la zona plástica y de la zona de singularidad, siendo más importante el estudio del espesor. En la Figura 2.10 se observa la influencia del espesor en el factor de intensidad de tensiones crítico para el Modo I.

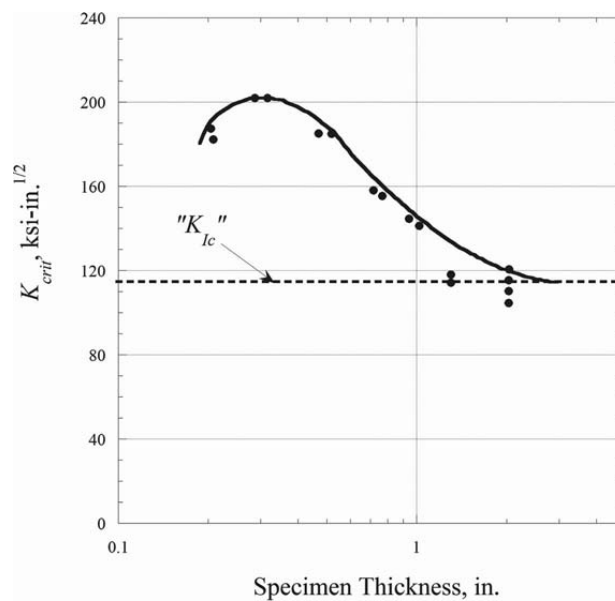


Figura 2.10: Influencia del espesor en el factor de intensidad de tensiones crítico para Modo I de deformación.



Como hemos visto antes, cuando la zona plástica es pequeña en relación al espesor de la probeta, tenemos condiciones de deformación plana en el contorno elasto-plástico, mientras que, cuando el radio de la zona plástica es del mismo orden que el espesor, tenemos un estado de tensión plana. En la figura se observa que en un estado de triaxialidad de tensiones el valor de  $K_C$  disminuye a medida que aumentamos el valor del espesor hasta alcanzar un valor, denominado *Espesor Límite*, a partir del cual no disminuye más. A este valor límite se le denomina *Tenacidad de Fractura en Deformación Plana*,  $K_{IC}$ .

Existen otros factores de los que depende el FIT crítico como por ejemplo, la temperatura o la velocidad de sollicitación.

## 2.2. Métodos de obtención del Factor de Intensidad de Tensiones.

Existen distintos métodos analíticos para calcular el FIT. Las herramientas computacionales de hoy en día se basan en tres métodos: *Correlación de Desplazamientos*, *Integral de Cierre de Fisura* y *el método de la Integral J*. En este trabajo nos centraremos en la Integral J que es el método que utilizaremos después. En el siguiente apartado se describe una breve introducción teórica de este procedimiento.

### 2.2.1. Integral J

Sabemos que la Tasa de Liberación de Energía tiene una relación directa con el Factor de Intensidad de Tensiones, pero también existe otro parámetro denominado *Tasa de Liberación no-lineal de Energía, J*, con el que podemos calcular el FIT. Este método de análisis puede aplicarse a procesos elasto-plásticos de carga monótona creciente. En la Figura 2.11 (Ref.[1]) se muestra el proceso de carga para un material elástico no-lineal y para un material elasto-plástico, que como observamos, el comportamiento es idéntico en ambos casos.

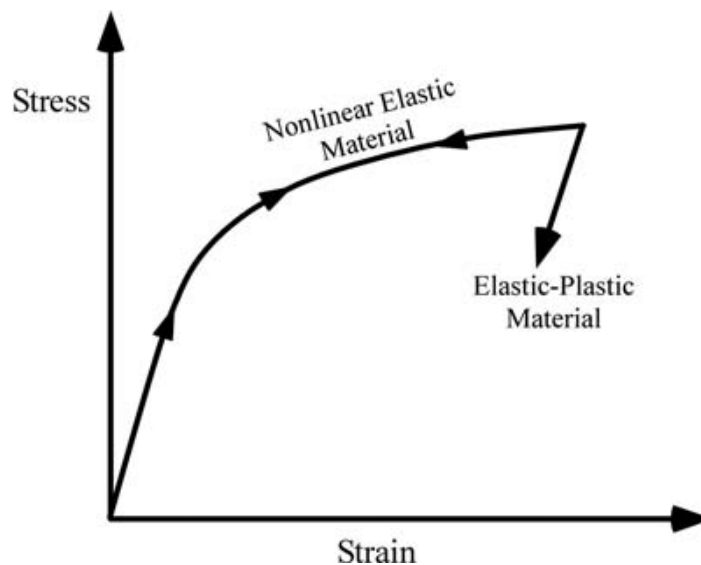


Figura 2.11: Comparación esquemática de la curva tensión-deformación para materiales elasto-plásticos y materiales elásticos no lineales.

La Integral J ha tenido mucho éxito como parámetro de caracterización de la fractura para materiales no lineales, pero también se puede utilizar en el caso de un

material elástico y lineal. Para este caso concreto,  $J = G$ , por lo que sustituyendo en la expresión (2.11), nos queda:

$$J = \frac{K_I^2}{E'} \quad (2.17)$$

### 2.2.1.1. J como integral de camino independiente.

Considerando un camino arbitrario ( $\Gamma$ ) alrededor del extremo de la fisura, tal y como se muestra en la Figura 2.12 (Ref.[1]). La integral J viene dada por la siguiente expresión.

$$J = \int_{\Gamma} \left( w \, dy - T_i \frac{\partial u_i}{\partial x} \, ds \right) \quad (2.18)$$

Donde  $w$  es la Densidad de Energía de Deformación,  $T_i$  son las componentes del vector de tracción, y  $ds$  es el incremento de longitud a lo largo del contorno  $\Gamma$ . La Densidad de Energía de Deformación se define como:

$$w = \int_0^{\varepsilon_{ij}} \sigma_{ij} \, d\varepsilon_{ij} \quad (2.19)$$

Donde  $\sigma_{ij}$  y  $\varepsilon_{ij}$  son el tensor de tensiones y el tensor de deformaciones respectivamente. El vector de tracción es un vector normal al contorno. Si fuésemos a construir el diagrama del cuerpo libre del material dentro del contorno,  $T_i$  definiría la tensión normal actuando sobre el contorno. Las componentes del vector de tracción vienen dadas por:

$$T_i = \sigma_{ij} n_j \quad (2.20)$$

Donde  $n_j$  son las componentes del vector unitario normal a  $\Gamma$ .

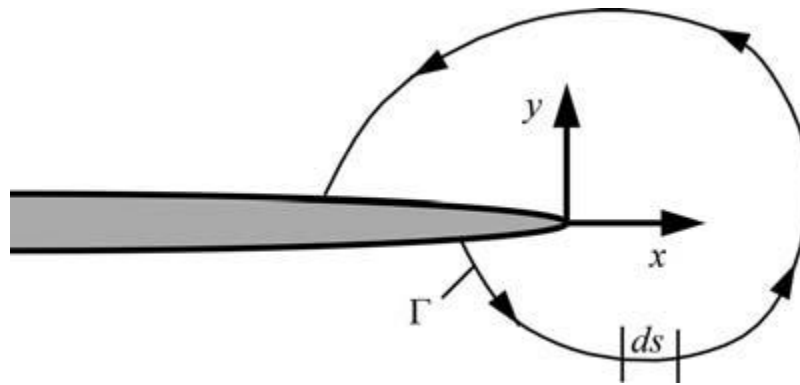


Figura 2.12: Contorno arbitrario alrededor del borde de fisura.

Rice demostró que el valor de la Integral  $J$  es independiente del camino de integración alrededor de la fisura (*Ref.[1].*).

## 2.3. Métodos numéricos para la determinación de la Integral J

La modelización numérica se ha convertido en una herramienta indispensable a la hora de analizar la fractura, debido a que sólo algunos problemas prácticos tienen una solución analítica cerrada.

Cientos de soluciones al problema de intensidad de tensiones han sido publicadas, siendo la mayoría de ellas deducidas a través de modelos numéricos. El análisis numérico para calcular la Integral J se está convirtiendo en algo relativamente común.

El rápido avance de la tecnología informática es el principal responsable del exponencial crecimiento de aplicaciones computacionales para el estudio de mecánica de fractura. Los nuevos superordenadores requieren sólo unos minutos para resolver problemas que tardarían meses o incluso años en resolverse con los antiguos ordenadores.

La mejora de los algoritmos de cálculo numérico ha reducido notablemente los tiempos de resolución de problemas de fractura. De la misma forma, los códigos comerciales facilitan el manejo de las herramientas computacionales e incorporan mayor número de subrutinas de mecánica de fractura.

### 2.3.1. Método de los elementos finitos.

En el método de los elementos finitos, el elemento estructural se divide en formas discretas denominadas *elementos*. Los elementos pueden ser de tipo unidimensional, bidimensional de tensión plana o de deformación plana, o tridimensional. Todos los elementos están conectados mediante *nodos* que aseguran la continuidad del campo de desplazamientos. La dimensión de la estructura no necesita corresponderse con la dimensión de los elementos. Por ejemplo, una estructura tridimensional puede construirse con elementos unidimensionales tipo barra.

La Figura 2.13 (*Ref.[1]*) muestra un elemento continuo isoparamétrico para un problema bidimensional de tensión plana o deformación plana, con un eje de coordenadas global y otro local, también denominado *eje de coordenadas paramétricas*. Las coordenadas locales varían entre -1 y 1 tal y como se muestra en la figura. Considerando un punto del elemento  $(\xi, \eta)$ , las coordenadas globales de dicho punto vienen dadas por:

$$x = \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) x_i$$

(2.21)

$$y = \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) y_i$$

Donde  $n$  es el número de nodos del elemento y  $N_i$  es la función de forma correspondiente al nodo  $i$ , cuyas coordenadas son  $(x_i, y_i)$  en el sistema global y  $(\xi_i, \eta_i)$  en el sistema paramétrico.

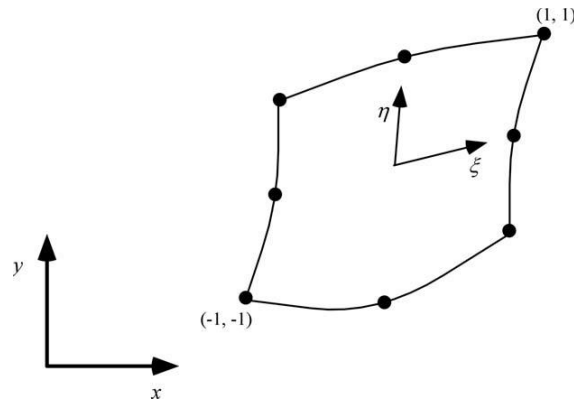


Figura 2.13: Coordenadas globales y locales para un elemento bidimensional.

Las funciones de forma son funciones polinómicas que interpolan campos dentro del elemento. El grado del polinomio depende del número de nodos del elemento. Los desplazamientos dentro del elemento son interpolados de la siguiente manera:

$$u = \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) u_i$$

(2.22)

$$v = \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) v_i$$

Donde  $(u_i, v_i)$  son los desplazamientos nodales en las direcciones  $x$  e  $y$  respectivamente. La matriz de deformación en  $(x, y)$  viene dada por:

$$\{\varepsilon\} = [B] \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \end{Bmatrix} \quad (2.23)$$

Donde

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

$[B]$  es la *Matriz de Deformación Nodal*, que se obtiene

La matriz de tensiones viene dada por la siguiente expresión:

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\} \quad (2.25)$$

Donde  $[D]$  es la matriz constitutiva de tensión-deformación.

El vector de fuerzas nodales depende de los desplazamientos en los nodos y de la rigidez del elemento. La *Matriz de Rigidez Elemental* viene dada por la siguiente expresión:

$$[k] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B]^T [D] [B] \det|J| \partial \xi \partial \eta \quad (2.26)$$

Esta expresión deriva del principio de mínima energía potencial. Las matrices de rigidez elementales se ensamblan para obtener la *Matriz de Rigidez Global*,  $[K]$ . Las fuerzas, desplazamientos y rigidez globales se relacionan mediante la siguiente expresión:

$$[F] = [K][u] \quad (2.27)$$

## **Capítulo 3**

### **Análisis numérico**



### 3.1. ABAQUS.

ABAQUS es un software de simulación que utiliza el método de elementos finitos para resolver una gran cantidad de problemas de ingeniería.

ABAQUS sigue la siguiente estructura: cuenta con un preprocesador que sirve para definir el problema que se llama CAE, que nos crea un archivo con una extensión tipo “.cae”. Este preprocesador nos genera un archivo con extensión “.inp”, que es el archivo en el que hemos definido el problema. Este problema se resuelve con un procesador. En ABAQUS disponemos de dos procesadores que consisten en dos formas de resolver las ecuaciones de los elementos finitos, uno utiliza un método implícito y se denomina “Standard”, y el otro utiliza un método explícito y se denomina “Explicit”. Este procesador nos genera un archivo de salida con extensión “.odb” que contiene todos los datos de la solución del problema. Para abrir este archivo necesitamos un entorno gráfico o postprocesador. Con ABAQUS CAE podemos trabajar tanto con archivos de tipo “.cae” como con archivos de tipo “.odb”, es decir, podemos definir el problema y ver la solución en el mismo entorno gráfico.

El preprocesador CAE permite diseñar la geometría, ya sea bidimensional o tridimensional, aplicar las cargas y definir las condiciones de contorno y definir las propiedades de los materiales utilizados entre otras muchas cosas. Contiene herramientas que permiten definir un mallado de elementos finitos de distinto tipo, lineal, cuadrático, de integración, etc.

El procesador nos permite realizar un análisis completo del problema que puede ser estático lineal o no lineal, dinámico lineal o no lineal, frecuencia natural, viscoplástico y viscoelástico...

Además, existen subrutinas que pueden ser implementadas por el usuario y otras que vienen implementadas en ABAQUS con las que podemos calcular, por ejemplo, la Integral-J en problemas de mecánica de fractura.

Con el postprocesador podemos ver los resultados obtenidos de manera muy simple. Nos permite ver deformaciones, tensiones y desplazamientos de cualquier punto, vectores y gráficos X-Y. También nos permite ver animaciones en función del tiempo de trabajo.

Este programa no sólo resuelve problemas de mecánica del sólido, sino que también resuelve problemas de transmisión de calor, de difusión de masa y de análisis termoeléctrico.

### 3.2. Descripción del modelo.

El modelo elegido para este estudio es una placa rectangular, sometida a una tensión de tracción por sus extremos, que consta de un agujero central con dos fisuras laterales tal y como se muestra en la Figura 3.1. Las dimensiones del modelo de la figura están en milímetros.

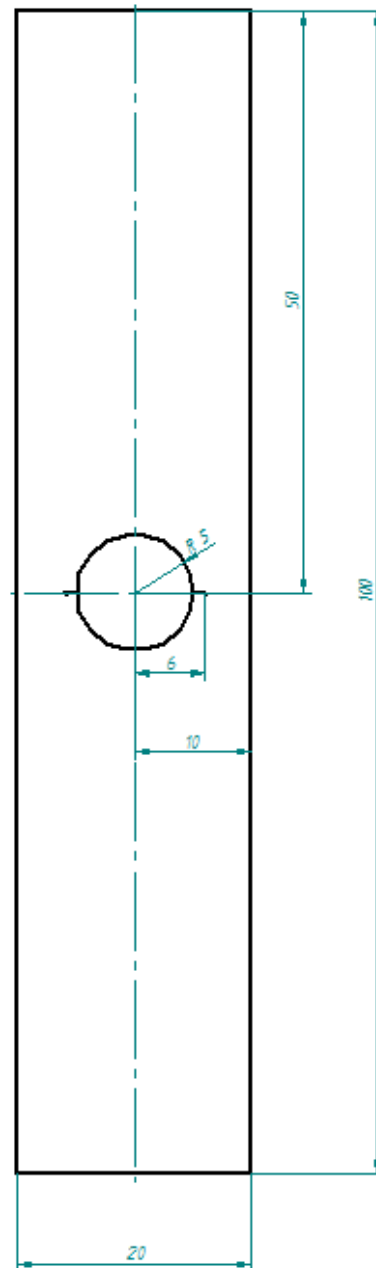


Figura 3.1: Dimensiones de la probeta en mm.

Esta placa será analizada de tres formas distintas. En primer lugar se realizará un estudio bidimensional, suponiendo que el problema es de deformación plana o, por el contrario, de tensión plana. Por último, se hará un estudio de un modelo tridimensional utilizando distintos espesores, ya que el análisis bidimensional es una simplificación de cualquier modelo real.

El material utilizado es polimetilmetacrilato, más conocido como PMMA. Es un polímero comercial que se está empleando como sustituto del vidrio por su mayor resistencia a la fractura. Este material se comporta como un material elástico lineal, su fractura se produce sin deformación plástica previa. Los valores de sus propiedades se exponen en la siguiente tabla:

PROPIEDADES	
Densidad, $\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )	1190
Modulo de Young, E (Pa)	2e9
Coeficiente de Poisson, $\nu$	0.33
Tenacidad a fractura, $K_{IC}$ (MPa·m <sup>0.5</sup> )	1

Tabla 3.1: Propiedades del PMMA. (Ref.[3])

La placa estará sometida a una tensión de tracción lineal en los extremos superior e inferior, que aumentará de forma lineal con el tiempo.

Es importante tener en cuenta que el programa ABAQUS no trabaja con unidades, por lo que todos los datos los introduciremos en las unidades del sistema internacional con el fin de saber siempre en qué unidades obtenemos la solución.

### 3.3. Análisis Bidimensional

#### 3.3.1. Geometría del problema.

En primer lugar, se modelizará la geometría de la placa en el modulo “Part” eligiendo un sólido 2D, homogéneo y deformable. Para ahorrar en coste computacional, se empleará un modelo de cuarto de placa tal y como se muestra en la Figura 3.2. Con esto disminuirán los tiempos de procesado.



Figura 3.2: Modelo empleado en el caso de estudio.

Como se aprecia en la imagen, se ha la geometría del agujero pero no de la fisura. Esto es porque el espesor de la fisura es despreciable en comparación con las medidas de la probeta y hay que simularlo de otra manera como se verá más adelante.

El siguiente paso será introducir las propiedades del material PMMA en el módulo “Property” y asignárselas a la placa.

### 3.3.2. Condiciones de contorno.

En este apartado se aplican las condiciones de contorno del problema y las solicitaciones a las que está sometido el modelo. Todo esto se realiza en el modulo “Load”.

En primer lugar se introduce la carga de tracción a la que está sometida la placa, cuya dirección y sentido se muestran en la Figura 3.3. Esta carga será de tipo “Pressure” y su valor será de 1000 Pa en dirección del eje X (el valor de la carga puede ser cualquiera ya que los resultados obtenidos serán adimensionalizados).

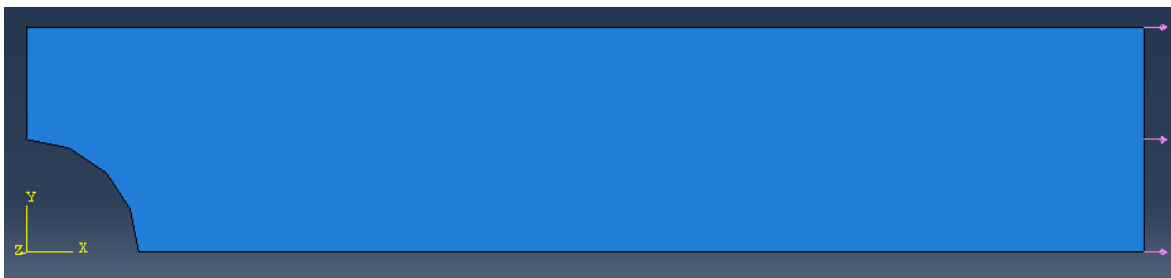


Figura 3.3: Carga aplicada al modelo.

Cuando se trabaja con modelos partidos por simetría, hay que establecer una serie de condiciones para que se cumpla la simetría y el modelo funcione correctamente. Para ello se utilizarán dos condiciones de contorno. La primera que impida el desplazamiento en dirección del eje Y y el giro en el eje Z en la base de la placa tal y como se muestra en la Figura 3.4. El giro no sería necesario ya que estamos trabajando en un caso bidimensional, pero siempre existe un pequeño espesor que hace que, si no restringimos el giro, los resultados no sean los correctos.

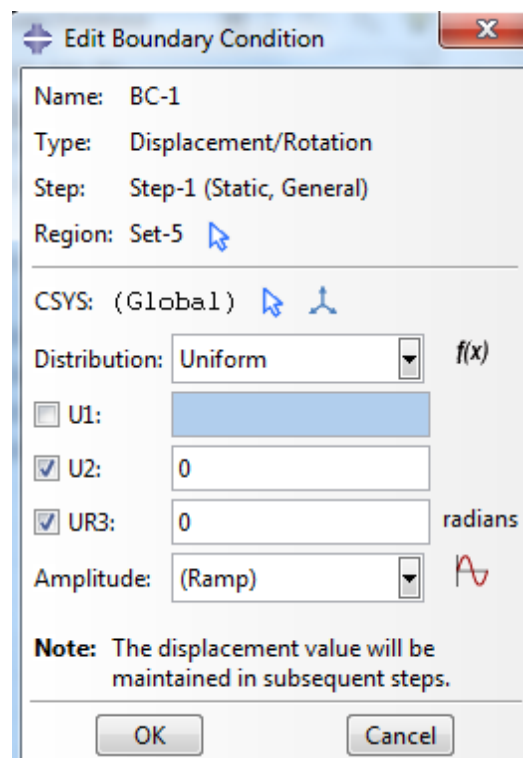
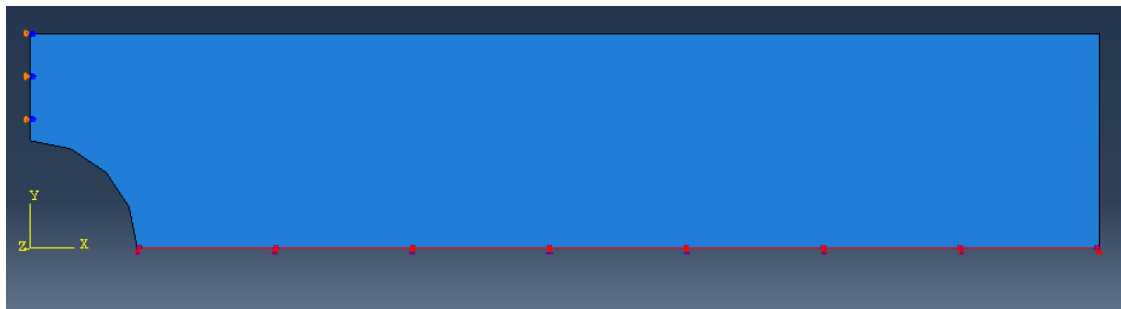


Figura 3.4: Condición de simetría en dirección Y para el modelo bidimensional.

La segunda condición de contorno es la que restringe el movimiento en el eje X y el giro en el eje Z en la cara lateral de la placa, tal y como se muestra en la Figura 3.5.

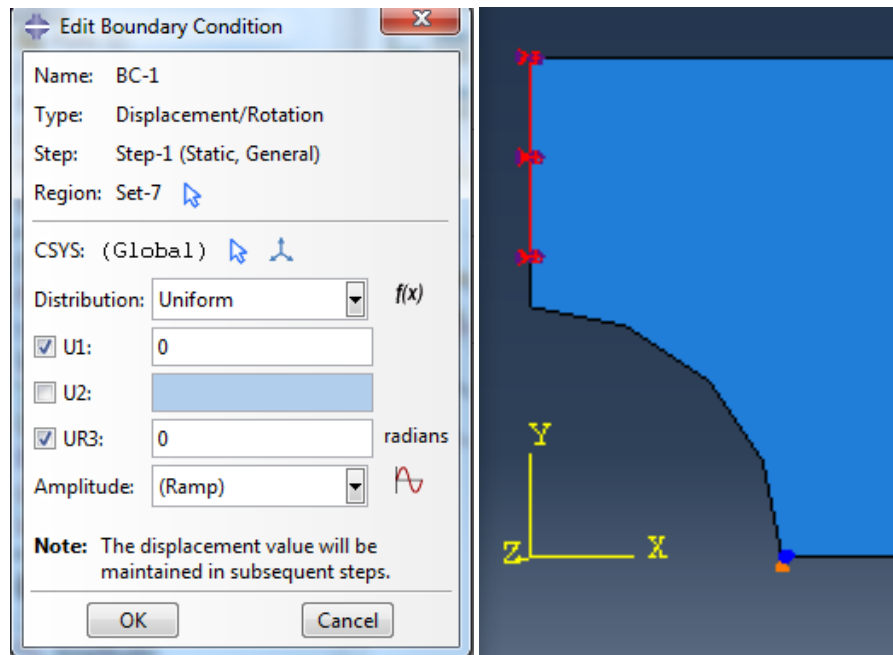


Figura 3.5: Condición de simetría en dirección Z para el modelo bidimensional.

Como se puede apreciar, en este caso, la condición de simetría no se aplica a toda la cara, sino que existe un espacio libre hasta el borde del agujero. Así es como se impone la existencia de una fisura, ya que al no aplicar la condición de simetría en ese tramo, estamos diciéndole al programa que existe una superficie libre correspondiente a la longitud de la fisura.

### 3.3.3. Modelización de la fisura

ABAQUS permite modelizar el comportamiento de la fisura. El primer paso es indicar cuál va a ser el frente de fisura. En el módulo “Interaction” se crea una fisura y se indica cual será el frente de fisura, que en este caso bidimensional será un punto, tal y como se muestra en la Figura 3.6.

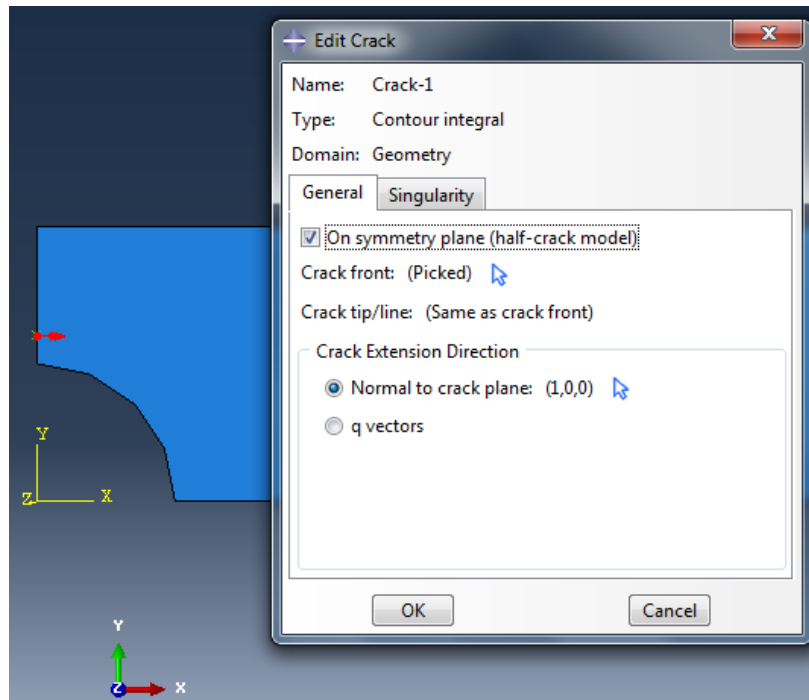


Figura 3.6: Dirección de propagación de la fisura.

Hay que indicar además, la dirección de propagación de la fisura. Esta será normal al plano de fisura y su sentido tal y como se muestra en la Figura 3.6. El sentido del vector normal al plano hace que los resultados finales de la Integral J salgan positivos o negativos. Como la fisura se encuentra en un plano de simetría, se selecciona la opción de plano de simetría.



### 3.3.4. Mallado del modelo.

A la hora de diseñar un mallado se deben tener en cuenta una serie de aspectos, ya que el tipo de elementos, su tamaño y su posición pueden influir en el resultado obtenido. Las mallas que constan de mayor número de elementos y de nodos tienen mayor precisión que las de menor número de nodos, sin embargo, tienen un coste computacional mayor, es decir, tienen menor rapidez de cálculo. La malla ideal será aquella que tenga el menor número de nodos para que el cálculo sea más rápido y, a su vez, que la solución final no se vea afectada por el mallado.

También se debe distinguir si se está trabajando en condiciones de deformación plana o en condiciones de tensión plana. Para ello se utiliza un tipo de elemento acorde con cada caso. La distinción entre un caso u otro afectará de forma significativa a los resultados.

En este trabajo se han realizado varios mallados con distintos números de elementos y de nodos, y se han comparado los resultados obtenidos de la Integral-J para un instante determinado, con el fin de encontrar el mallado más adecuado.

Los elementos que se emplean son de tipo cuadrangular y en algunos casos triangular, cuando lo requiera el mallado. También se emplean elementos lineales (cada elemento tiene el mismo número de nodos que de aristas) y elementos cuadráticos (cada elemento tiene el doble de nodos que de aristas). Las Figuras 3.7-3.11 muestran los tipos de mallado utilizados.

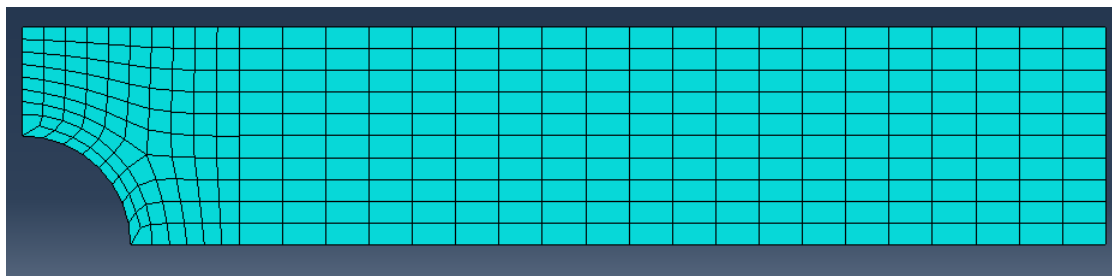


Figura 3.7: mallado de 304 elementos y 356 nodos.

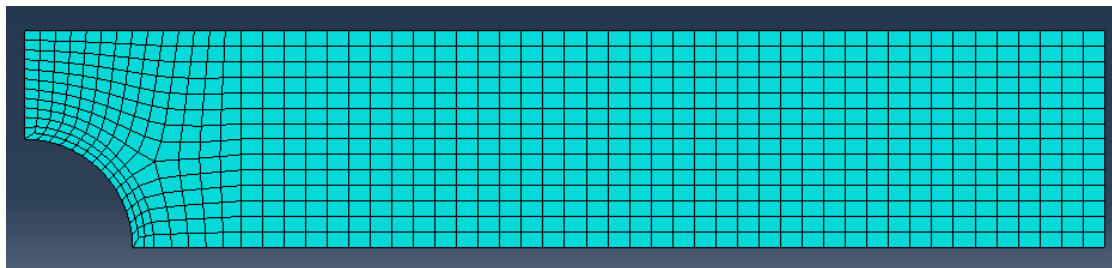


Figura 3.8: mallado de 758 elementos y 829 nodos.

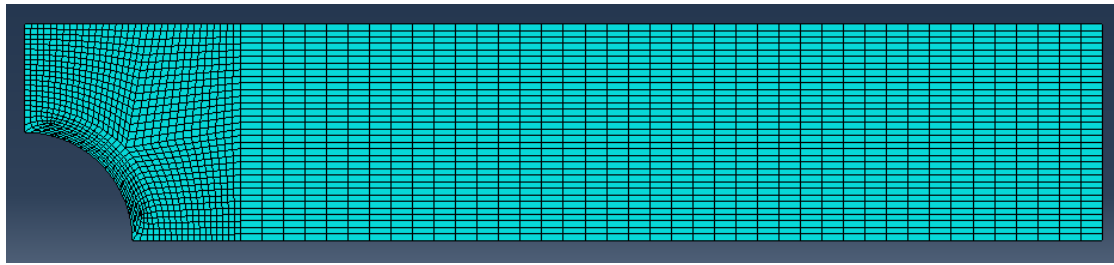


Figura 3.9: mallado de 2360 elementos y 2466 nodos.

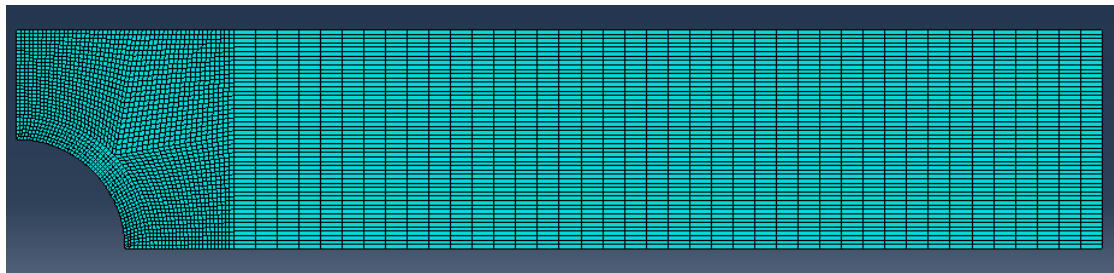


Figura 3.10: mallado de 4148 elementos y 4294 nodos.

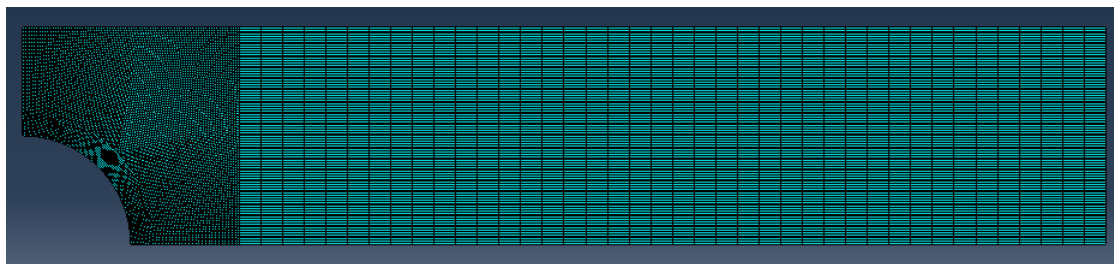


Figura 3.11: mallado de 12529 elementos y 12783 nodos.

En las figuras anteriores se muestra la forma del mallado. A esto hay que añadir que se han utilizado elementos lineales y elementos cuadráticos, y se han comparado los resultados en la figura que se muestra a continuación.

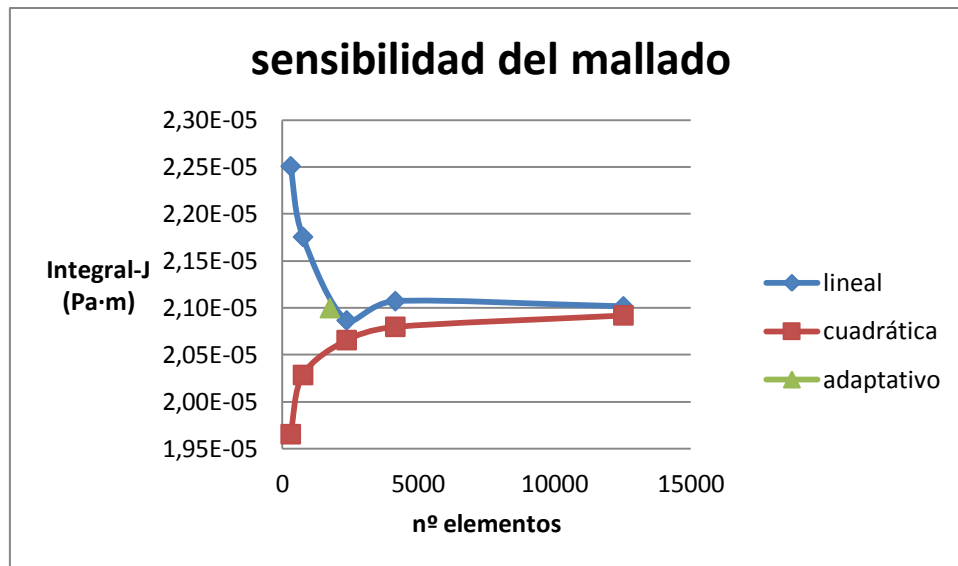


Figura 3.12: Integral-J en función del número de elementos para mallados lineales y cuadráticos.

Como se puede observar, para un número determinado de elementos la solución del cálculo de la Integral-J converge hacia un valor, por lo que no tendría sentido realizar mallados con mayor número de elementos.

El número de elementos que se ha utilizado a la hora de realizar el análisis de sensibilidad de la malla, es el número total de elementos del modelo pero no todo el modelo necesita un mallado de las mismas dimensiones. La Integral-J se calcula mediante unos contornos creados alrededor del extremo de la fisura, por lo que en esos puntos se necesitará un mayor refinamiento de la malla. Para ello se crea un mallado adaptativo, donde el tamaño de los elementos se decida en función a la mayor o menor proximidad del elemento al extremo de la fisura. La Figura 3.13 muestra el mallado escogido.

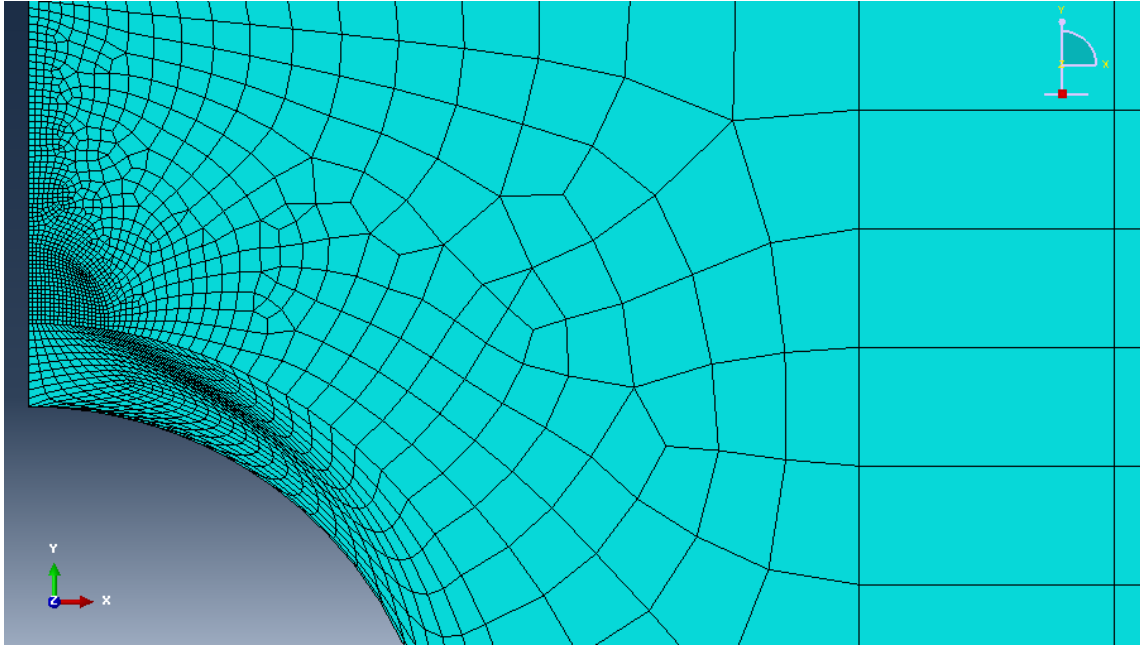


Figura 3.13: Mallado adaptativo de 1746 elementos.

Una vez realizado este mallado, hay que ver si la solución obtenida entra dentro del rango de convergencia que hemos obtenido antes. En la Figura 3.12 se muestra la solución obtenida con el mallado adaptativo en comparación con las obtenidas anteriormente.

Como se observa, la solución entra dentro de la zona de convergencia por lo que podemos concluir que, utilizando un mallado adaptativo se consiguen resultados óptimos utilizando un número menor de elementos y disminuyendo así el coste computacional.

### 3.3.5. Comparación de resultados.

Una vez obtenidos los resultados mediante el método de los elementos finitos en ABAQUS, habrá que comprobar si dichos resultados son fiables o no. Para ello se van a comparar los resultados obtenidos de la Integral-J en ABAQUS, con los calculados a partir de referencias bibliográficas. En este caso, se utilizarán los resultados obtenidos por J.C.Newman en su estudio. (Ref.[5])

#### Método de colocación de contornos.

El trabajo de Newman consistió en la obtención del factor geométrico para el caso de una placa rectangular sometida a tracción con un agujero central y dos fisuras laterales, mediante el método de colocación de contornos.(Ref.[5])

El método de colocación de contornos consiste en modelizar únicamente los contornos próximos a la región de interés, en este caso, el extremo de la fisura.

Los datos obtenidos fueron recogidos en un gráfico que proporciona el valor del factor geométrico en función de la relación entre altura de la placa, ancho de la placa y longitud de la fisura. La Figura 3.14 muestra los resultados obtenidos con una precisión mayor a 0,1%.

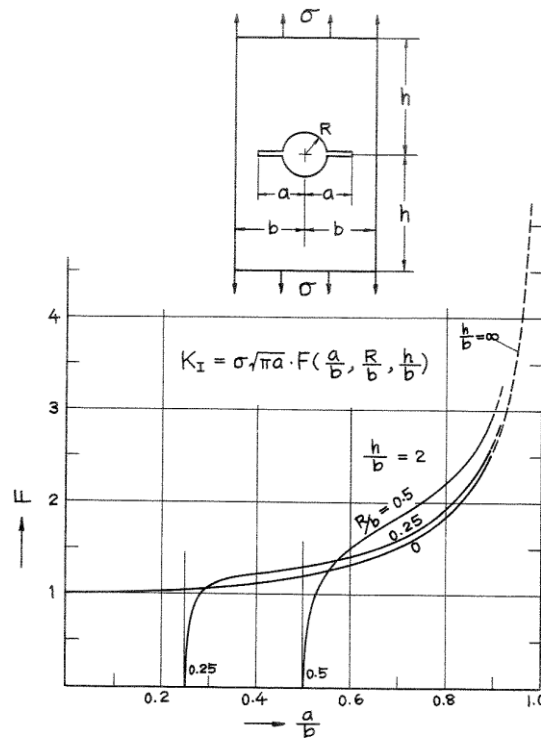


Figura 3.14: Gráfica del factor geométrico de Newman para el caso de estudio.(Ref.[4])

El valor del factor de intensidad de tensiones a partir del factor de forma obtenido, se calcula mediante la siguiente expresión:

$$K_I = \sigma\sqrt{\pi a} \cdot F\left(\frac{a}{b}, \frac{R}{b}, \frac{h}{b}\right) \quad (4.1)$$

Los resultados obtenidos en ABAQUS son de la Integral-J y no del factor de intensidad de tensiones, por tanto, se deberá calcular el valor de J crítico obtenido por Newman utilizando las expresiones que relacionan  $K$  y  $J$ .

$$J_{IC} = \frac{K_I^2}{E'} \begin{cases} \text{tensión plana} \rightarrow J_{IC} = \frac{K_I^2}{E} \\ \text{deformación plana} \rightarrow J_{IC} = \frac{K_I^2(1-\nu^2)}{E} \end{cases} \quad (4.2)$$

En la Tabla 3.2 se comparan los resultados obtenidos mediante el análisis con ABAQUS con los obtenidos mediante la referencia de Newman.

	$J_{IC}$ (Pa·m) Newman	$J_{IC}$ (Pa·m) ABAQUS	$\varepsilon$ Error
Tensión plana	$2,1205 \cdot 10^{-5}$	$2,0999 \cdot 10^{-5}$	0,97 %
Deformación plana	$1,8896 \cdot 10^{-5}$	$1,86708 \cdot 10^{-5}$	1,19 %

Donde  $\varepsilon = \frac{J_{IC,Newman} - J_{IC,ABAQUS}}{J_{IC,Newman}}$ , error relativo del resultado de ABAQUS respecto a la referencia de J.C.Newman.

Tabla 3.2: Comparación de la Integral-J calculada en ABAQUS con la calculada por Newman.

Se observa que el error relativo conseguido es muy bajo, por lo que los resultados obtenidos son muy fiables.

### 3.4. Análisis tridimensional.

En este apartado se analizarán probetas de varios espesores con el fin de determinar el valor de la Integral-J a lo largo del espesor de la pieza. Se compararán los resultados con los obtenidos en los modelos bidimensionales.

#### 3.4.1. Descripción del modelo.

Para el análisis tridimensional se ha utilizado un modelo que corresponde a 1/8 de placa. Esto quiere decir que no sólo tendremos condiciones de simetría respecto a los ejes X e Y, sino que también tendremos simetría respecto al eje Z. Esto reduce el tiempo de procesamiento de datos y evita desplazamientos en dirección Z en el eje de simetría que se podrían ocasionar si no se hubiese establecido la condición de simetría. La Figura 3.15 muestra la condición de simetría en el espesor de la probeta.

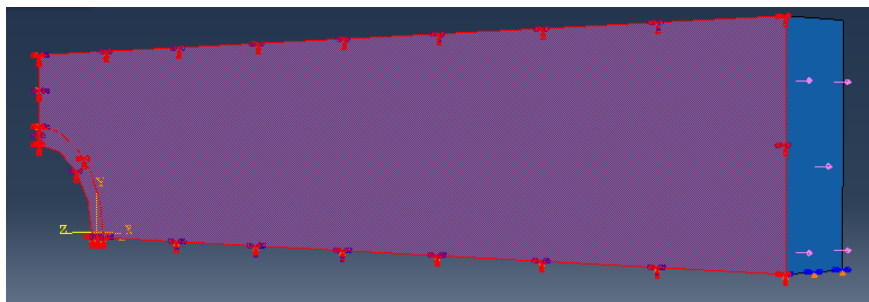


Figura 3.15: Condición de simetría en dirección Z para el modelo tridimensional.

El resto de condiciones de contorno, propiedades del material y cargas serán las mismas que se han utilizado para el análisis bidimensional.

### 3.4.2. Mallado del modelo.

Para el caso tridimensional utilizaremos también un mallado adaptativo que se afine a medida que nos acerquemos a las proximidades del extremo de la fisura. Se utilizará el mismo mallado en el plano XY para todas las probetas, pero será distinto en el plano YZ dependiendo del espesor. El número de elementos a lo largo del espesor corresponderá con el número de puntos en los que se podrá calcular la Integral-J. La siguiente figura muestra el mallado utilizado en cada probeta en el plano XY.

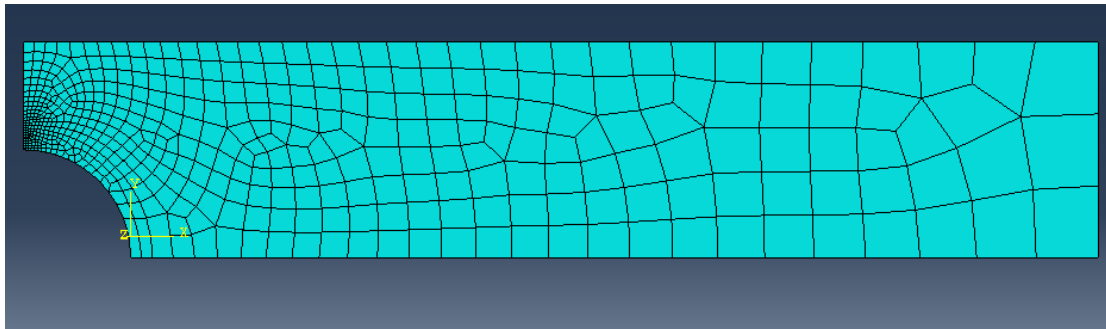
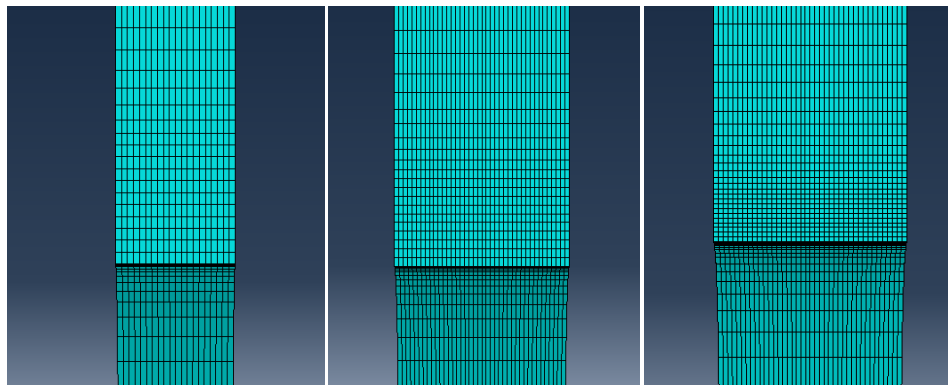


Figura 3.16: Mallado del modelo tridimensional en el plano XY.

En el Plano YZ, el mallado también será adaptativo, de manera que los elementos más pequeños sean los más cercanos al frente de fisura. En las siguientes figuras se muestra el mallado utilizado en el plano YZ para cada espesor.

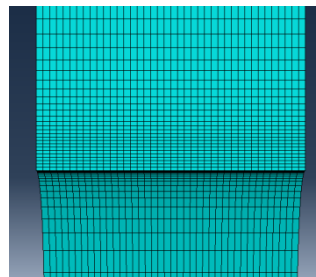




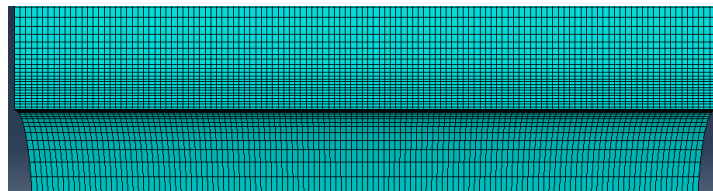
espesor 2mm

espesor 4mm

espesor 8mm



espesor 16 mm



espesor 50 mm

Figura 3.17: Mallado del espesor para las probetas de 2, 4, 8, 16 y 50 mm.

### 3.4.3. Influencia del espesor.

En este punto se analizará la influencia del espesor de la probeta en los valores de la Integral-J. Para ello se ha obtenido el valor máximo de la Integral-J, que se da en el plano medio del espesor, en cada probeta y se ha adimensionalizado con respecto al valor de J para el modelo bidimensional de tensión plana.

La Tabla 3.3 muestra los resultados del valor promedio de J adimensionalizado en el plano medio del espesor para los distintos modelos.

espesor (mm)	$J_{max}/J_0$
2	1,03218288
4	1,01612035
8	0,99828633
16	0,97027096
50	0,9140783

Tabla 3.3: Resultados del análisis comparativo del valor de J para distintos espesores.

A continuación, se muestra una gráfica comparativa de los resultados obtenidos en el análisis tridimensional con los obtenidos en el análisis bidimensional.

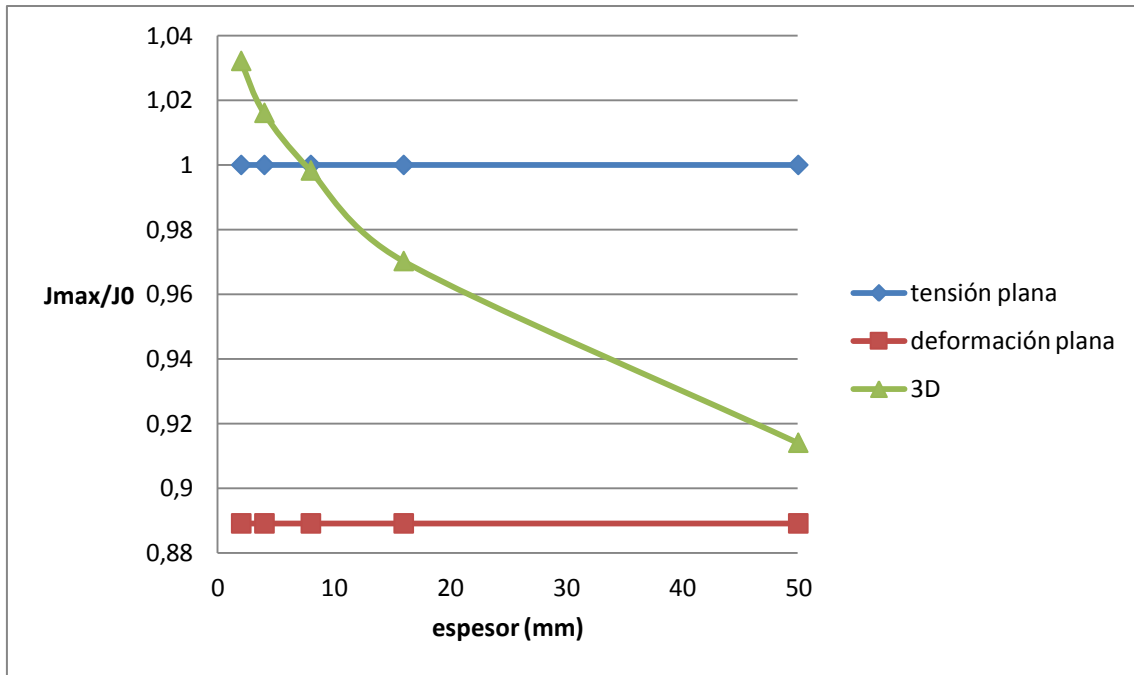


Figura 3.18: Valor máximo de la Integral-J adimensionalizado para diferentes espesores.

Otro dato importante de cálculo es determinar la distribución de la Integral-J a lo largo del espesor. Las siguientes figuras muestran la distribución de J a lo largo del espesor en los puntos cercanos al extremo de la fisura.

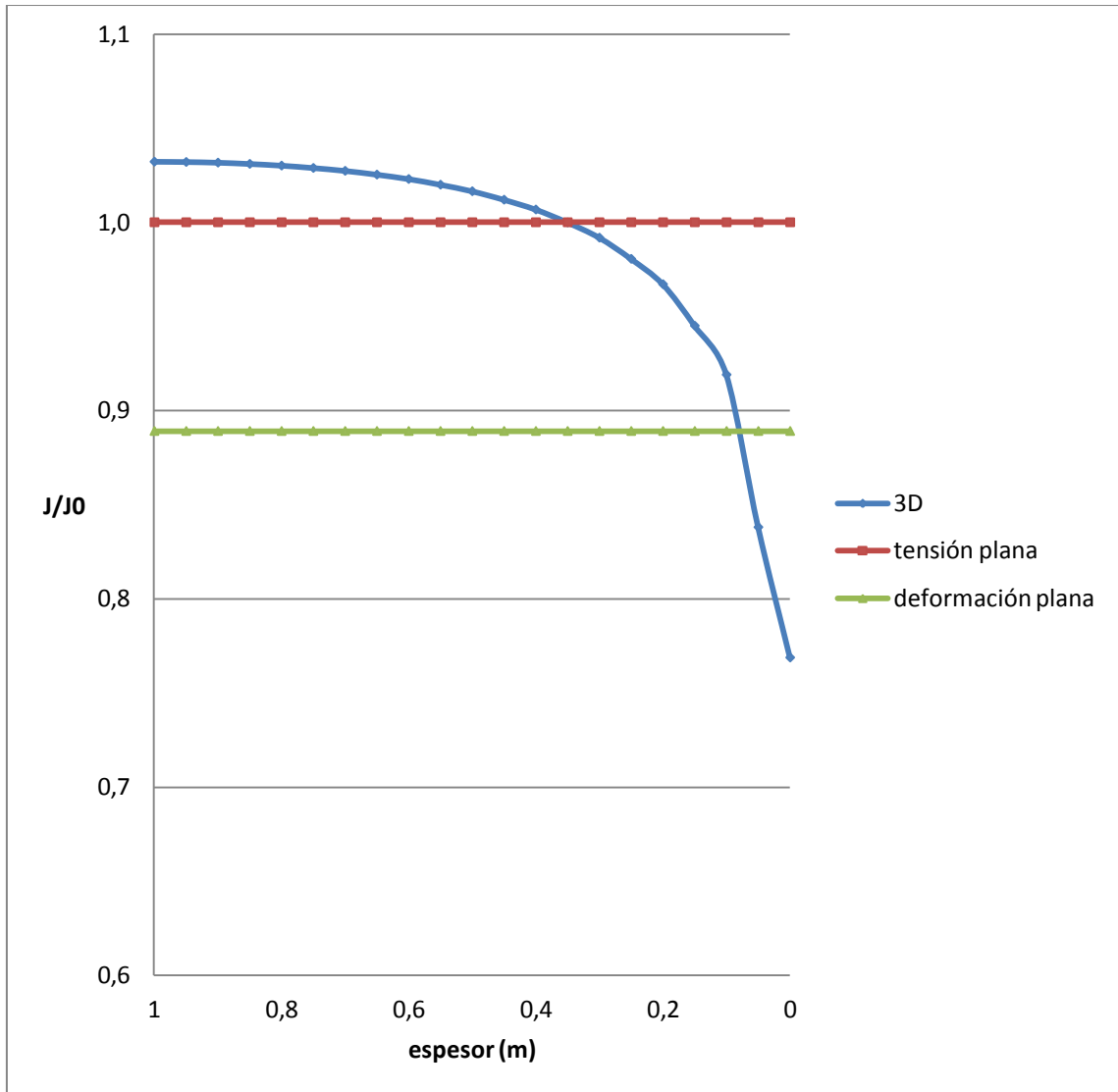


Figura 3.19: Distribución de  $J$  a lo largo del frente de fisura desde el plano medio hasta la superficie libre para el modelo de espesor 2 mm.

La siguiente figura muestra la variación de  $J$  a lo largo del espesor para todos los espesores analizados.

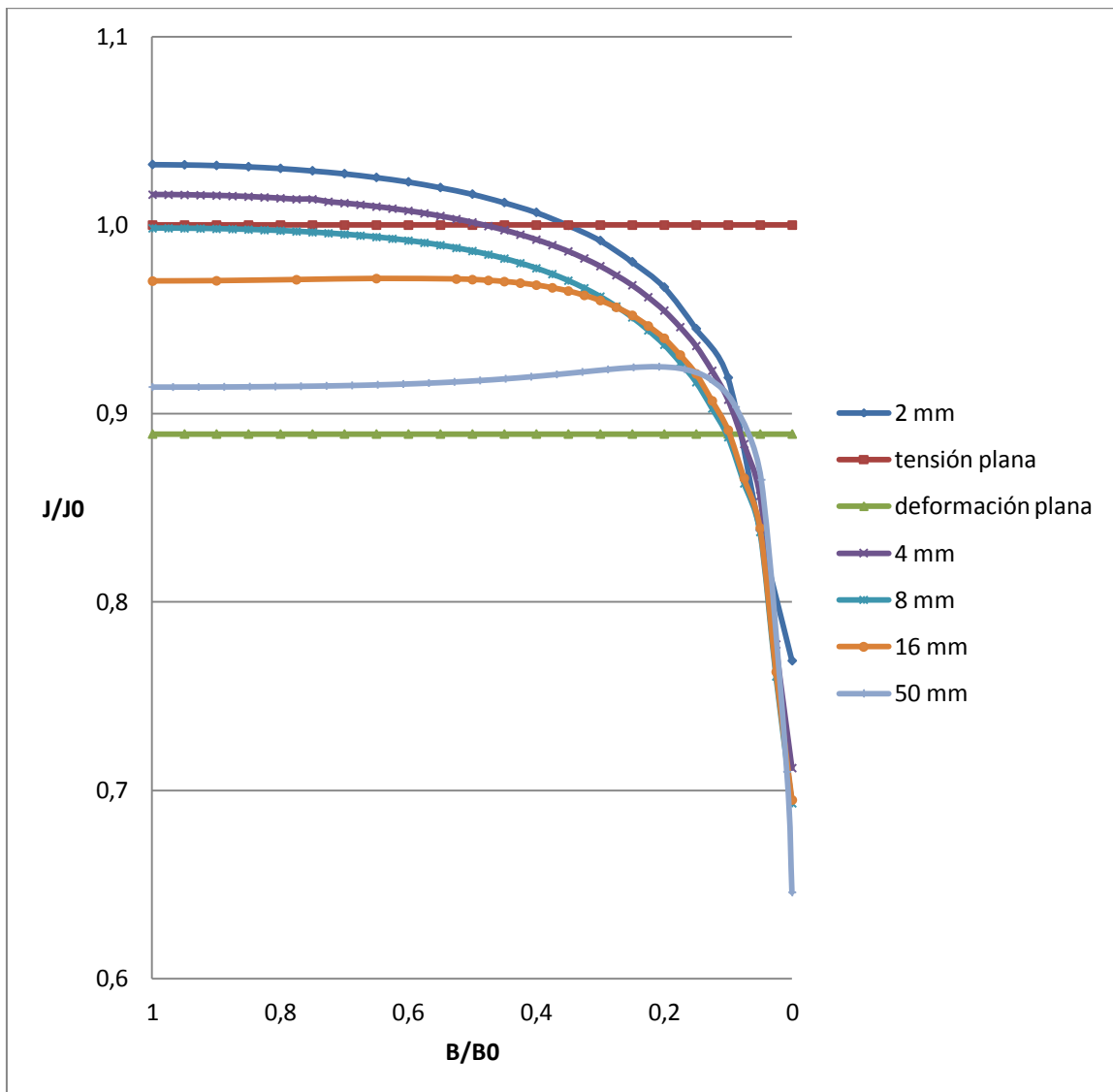
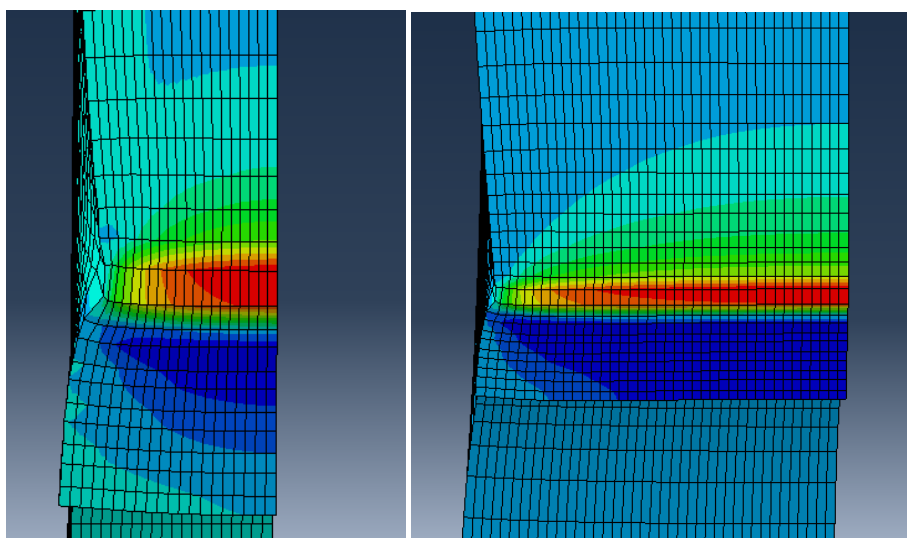


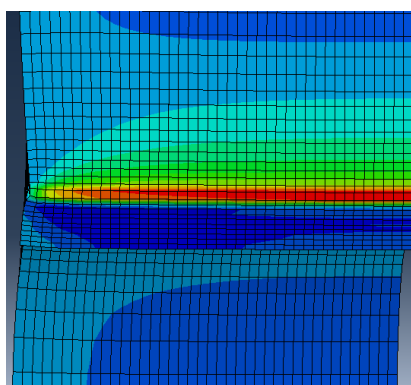
Figura 3.20: Distribución de  $J$  a lo largo del frente de fisura desde el plano medio hasta la superficie libre para distintos espesores.

Las siguientes imágenes muestran la variación de la tensión en Z a lo largo de del espesor.

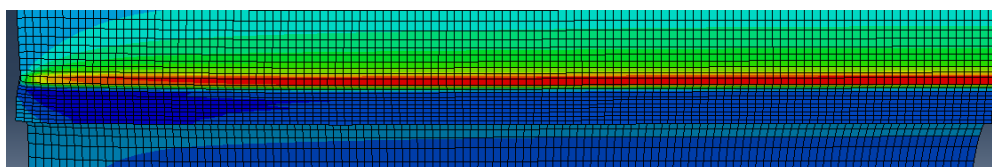


espesor 2 mm

espesor 8 mm



espesor 16 mm



espesor 50 mm

Figura 3.21: Variación de la tensión en dirección Z en los distintos espesores.

### 3.4.4. Discusión de resultados.

La Figura 3.18 muestra los valores máximos de  $J$ , tomados en el plano medio del espesor, en función del espesor de la probeta. Tomando como referencia el valor de  $J$  calculado utilizando un modelo de tensión plana, se puede comprobar que no siempre estaremos del lado de la seguridad. Para espesores muy pequeños, menores a 10 mm,  $J$  alcanza un valor más elevado que utilizando la simplificación bidimensional de tensión plana. Este dato hay que tenerlo en cuenta a la hora de diseñar nuestros modelos. Sin embargo, a medida que aumentamos el espesor de la probeta, los valores de  $J$  van acercándose a los obtenidos en el modelo bidimensional de deformación plana.

Estos datos son congruentes con la teoría, ya que para una probeta de espesor infinito, las condiciones que se dan son de deformación plana. También cambia la curvatura de la variación de  $J$  a lo largo del espesor con respecto a las probetas de pequeño espesor.

Respecto a la distribución de  $J$  a lo largo del espesor, se observa que la hipótesis de que el valor máximo de  $J$  se da en el plano medio del espesor se cumple. También cabe destacar, que para grandes espesores, el valor de  $J$  se mantiene prácticamente constante a lo largo de todo el espesor hasta las proximidades de la superficie libre, donde experimenta una caída brusca. Para espesores pequeños, la disminución del valor de  $J$  a lo largo del espesor es más lineal.

En la Figura 3.21 Se puede observar que la tensión máxima en dirección  $Z$  se concentra en el plano medio de la fisura y va disminuyendo a medida que nos acercamos a la superficie libre. Esto demuestra que en puntos cercanos al plano medio se dan condiciones de deformación plana y en puntos cercanos a la superficie libre se dan condiciones de deformación plana. A medida que vamos aumentando el espesor de la probeta, la zona de deformación plana aumenta, ocupando en algunos casos, la mayor parte del espesor. Estos datos concuerdan con los recogidos en la Figura 3.20.

### 3.4.5. Criterio de fractura.

En este punto, se determinará la carga que puede soportar el modelo antes de la fractura. Se utilizará como valor crítico del Factor de Intensidad de Tensiones el valor de la Tenacidad de Fractura. El valor de  $K_{IC}$  está calculado experimentalmente para unas condiciones de deformación plana (*Ref.[3]*). Utilizando este valor y sustituyéndolo en la expresión (2.17) para deformación plana, se obtiene el valor de  $J$  crítico.

Para determinar el momento de rotura, se utilizará una tensión de tracción exageradamente grande que asegure que se alcance el valor crítico de  $J$ . Este valor máximo, como se ha expuesto en capítulos anteriores, se da en el plano medio del espesor. Una vez calculado  $J_C$ , Se determinará el tiempo de aplicación de la carga en el que se alcanza ese valor máximo, y con él se calcula cual es la carga aplicada en ese momento, ya que el tiempo y la carga aplicada tienen una relación lineal.

En la Figura 3.22 se muestra la carga aplicada en el momento de rotura adimensionalizada, utilizando el valor de la carga obtenido con un espesor de 2 mm, para distintos espesores de probeta.

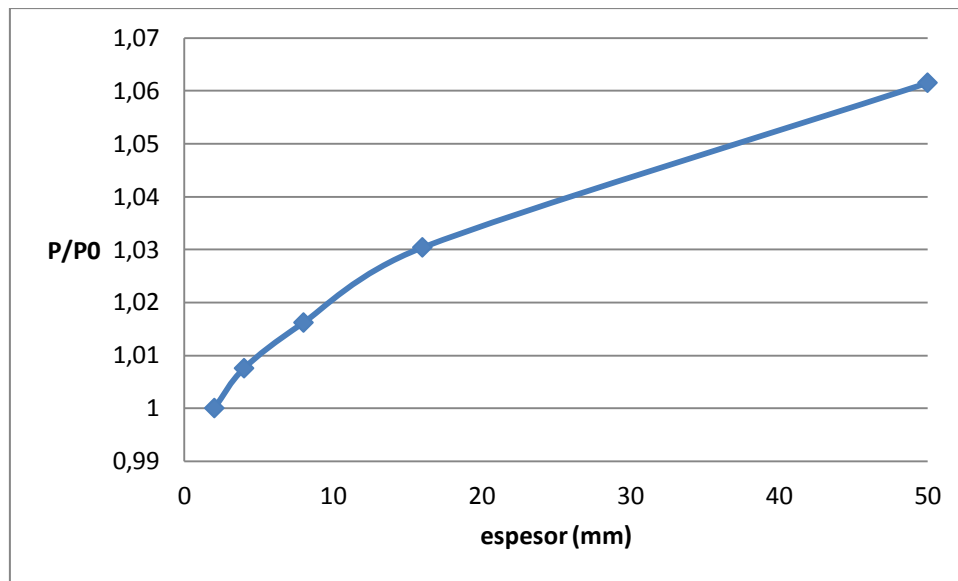


Figura 3.22: Carga que soporta el modelo en función del espesor.

Se puede observar que la carga que aguanta el material aumenta ligeramente con el espesor, menos un 6% en los casos considerados.



# **Capítulo 4**

## **Conclusiones**

## 4.1. Resumen y conclusiones

En este trabajo se ha realizado un análisis numérico sobre la influencia del espesor de un material en la resistencia a fractura del mismo. Para ello se han realizado simplificaciones bidimensionales y se han comparado con modelos tridimensionales de distintos espesores. Se ha utilizado el programa ABAQUS basado en el método de los elementos finitos y se han comparado algunos resultados con fuentes bibliográficas.

El elemento analizado ha sido una placa rectangular con un agujero central con dos fisuras laterales, sometida a una tensión de tracción uniforme. El método de medida de la resistencia a fractura analizado ha sido el cálculo de la Integral-J en las proximidades del extremo de la fisura.

Del estudio realizado se pueden sacar las siguientes conclusiones:

- Los resultados de J en el análisis bidimensional son muy parecidos a los obtenidos por cálculos analíticos en la bibliografía, siendo el error relativo entre ambos procedimientos es muy pequeño.
- En el caso tridimensional, se ha analizado el valor de la Tasa de Liberación de Energía, J, utilizando probetas de espesores que varían entre 1 y 50 mm. Del análisis tridimensional se puede concluir que, para probetas de pequeño espesor, el valor máximo de J es mayor que el calculado en el modelo de tensión plana. Esto quiere decir que a la hora de diseñar piezas de pequeño espesor no podemos adoptar un modelo simplificado de tensión plana ya que estaría del lado de la inseguridad.
- Por otro lado, para probetas de gran espesor, el valor de J disminuye y se acerca al obtenido en un modelo de deformación plana. Podríamos simplificar los modelos a un estado bidimensional de tensión plana de una manera segura, pero en la mayoría de los casos estaríamos sobredimensionando la pieza, con el consiguiente derroche económico.
- El valor crítico del factor de intensidad de tensiones y de la Integral-J se da en el plano medio del espesor, y disminuye a medida que se acerca a la superficie libre, por tanto, es en dicho plano donde se alcanzarían antes las condiciones críticas para la rotura, y donde se iniciaría la propagación de la fisura.

## **4.2. Trabajos futuros**

Los resultados obtenidos en este estudio pueden servir como primer paso de estudio del comportamiento de un sólido frente a fractura.

Sería interesante realizar una campaña de experimental de ensayos para verificar los resultados obtenidos en este trabajo.

Una vez comparados los resultados, se podría extender el estudio a otro tipo de materiales, como por ejemplo materiales con endurecimiento.

Una vez realizado un estudio bajo cargas estáticas, se podría empezar a investigar el comportamiento del modelo bajo cargas de impacto o dinámicas.

Por último sería interesante realizar un estudio de la propagación de la fisura. En este estudio se podría medir la velocidad de propagación o hacia donde se propaga la fisura en probetas de distintos espesores.

## **Referencias Bibliográficas.**

[1] T.L.Anderson.

“Fracture Mechanics: Fundamentals and Applications”.

CRC Press, 1995.

[2] D.Broek.

“Elementary engineering fracture mechanics”.

Kluwer Academi, 1991.

[3] William D. Callister, Jr.

“Introducción a la Ciencia e Ingeniería de los Materiales”

Reverté, 2007.

[4] H.Tada, P.C.Paris, G.R.Irwin.

“The Stress Analysis of Cracks Handbook” Second Edition.

Paris Productions Incorporated, 1973.

[5] J.C.Newman, Jr.

“An Improve Method of Collocation for the Stress Analysis of Cracked Plates with Various Shaped Boundaries”.

NASA TN D6376, 1971.